Matemáticas III

Tercer grado. Volumen II

TELEsecundaria

Matemáticas III

Tercer grado. Volumen II

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEsecundaria

Matemáticas III. Volumen II fue elaborado en la Coordinación de Informática Educativa del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), de acuerdo con el convenio de colaboración con la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

Autores
Araceli Castillo Macías, Rafael Durán Ponce, Silvia García Peña, José Cruz García Zagal, Olga Leticia López Escudero, Jesús Rodríguez Viorato

Asesoría académica
María Teresa Rojano Ceballos (DME-Cinvestav)
Judith Kalman Landman (DIE-Cinvestav)

Revisores académicos externos
David Francisco Block Sevilla, Carlos Bosch Giral, Luis Alberto Briseño Aguirre

Apoyo técnico y pedagógico
María Catalina Ortega Núñez

Diseño de actividades tecnológicas
Mauricio Héctor Cano Pineda, Emilio Domínguez Bravo, Deyanira Monroy Zariñán

Coordinación editorial
Sandra Hussein Domínguez

Revisión de estilo
Concepción Asuar

Portada
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *El tianguis* (detalle), 1923-1924, Diego Rivera (1886-1957), fresco, 4.60 × 2.37 m (panel central), ubicado en el Patio las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/ fotografía de Gerardo Landa Rojano; D.R. © 2019 Banco de México, Fiduciario en el Fideicomiso relativo a los Museos Diego Rivera y Frida Kahlo. Av. 5 de Mayo No. 2, col. Centro, Cuauhtémoc, C. P. 06059, Ciudad de México; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2019.

Servicios editoriales

Dirección de arte
Rocío Mireles Gavito

Diseño
Zona Gráfica

Diagramación
Bruno Contreras, Víctor Vilchis

Iconografía
Cynthia Valdespino

Ilustración
Curro Gómez, Víctor Eduardo Sandoval, Gabriela Podestá, Juan Pablo Romo

Fotografía
Bruno Contreras, Cynthia Valdespino, Fernando Villafán, Art Explosion 2007

Primera edición, 2008
Segunda edición, 2019. Ciclo escolar 2019-2020

ISBN: 978-607-551-170-2 (obra completa)
ISBN: 978-607-551-174-0 (volumen II)

Impreso en México

Índice

Bloque 1

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
1. Productos notables y factorización. Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - a)$. Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 + a^2$.	1.1 A formar cuadrados	Programa 1		
	1.2 El cuadrado de una diferencia		Interactivo	
	1.3 La diferencia de dos cuadrados			
	1.4 A formar rectángulos	Programa 2		
	1.5 Un caso especial de factorización			
2. Triángulos congruentes y cuadriláteros. Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.	2.1 Lados opuestos iguales			La diagonal de un paralelogramo (Geometría dinámica)
	2.2 Puntos medios	Programa 3	Interactivo	Cómo verificar la congruencia de las figuras (Geometría dinámica)
3. Entre rectas y circunferencias. Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente a una circunferencia.	3.1 Puntos en común			
	3.2 Trazos de tangentes	Programa 4	Interactivo	Tangentes (Geometría dinámica)
	3.3 Entre circunferencias		Interactivo	
	3.4 Algunos problemas	Programa 5		
4. Ángulos en una circunferencia. Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.	4.1 Dos ángulos de una circunferencia			Ángulos inscritos en una circunferencia (Geometría dinámica)
	4.2 Relaciones a medias			
	4.3 Probemos que uno es la mitad del otro	Programa 6	Interactivo	
	4.4 Problemas de medida	Programa 7		
5. Problemas con curvas. Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	5.1 Sólo una parte	Programa 8	Interactivo	
	5.2 Lo que resta			
	5.3 De todo un poco			
6. La razón de cambio. Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.	6.1 El incremento			¿Sabes que es una razón? (Hoja de cálculo)
	6.2 Pendiente y razón de cambio	Programa 9	Interactivo	
	6.3 Algunas razones de cambio importantes	Programa 10		
7. Diseño de experimentos y estudios estadísticos. Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización y representación tabular o gráfica más adecuada para presentar la información.	7.1 Diseño de un estudio estadístico. ¿Qué materia te gusta más?	Programa 11	Interactivo	
	7.2 Un juego de letras. Otro estudio estadístico			
	7.3 ¿Qué cantidad de agua consumen diariamente los alumnos de tercer grado?	Programa 12		
EVALUACIÓN				

Bloque 2

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
8. Ecuaciones no lineales. Utilizar ecuaciones no lineales para modelar situaciones y resolverlas utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	8.1 El número secreto	Programa 13		Ecuaciones con más de una solución I (Calculadora)
	8.2 Cubos, cuadrados y aristas			
	8.3 Menú de problemas	Programa 14	Interactivo	
9. Resolución de ecuaciones por factorización. Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	9.1 ¿Cuánto miden los lados?	Programa 15		
	9.2 Los factores de cero		Interactivo	
	9.3 El adorno	Programa 16		
	9.4 Apliquemos lo aprendido			
10. Figuras semejantes. Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados.	10.1 Un corazón muy especial	Programa 17	Interactivo	
	10.2 Aplicaciones de la semejanza	Programa 18	Interactivo	
11. Semejanza de triángulos. Determinar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.	11.1 Explorando la semejanza de triángulos	Programa 19		
	11.2 Criterios de semejanza de triángulos I			Idea de triángulos semejantes (Geometría dinámica)
	11.3 Criterios de semejanza de triángulos II			
	11.4 Cálculo de distancias	Programa 20	Interactivo	
12. Índices. Interpretar y utilizar índices para explicar el comportamiento de diversas situaciones.	12.1 El índice nacional de precios al consumidor	Programa 21		
	12.2 Índices en la escuela			
	12.3 ¿Quién es el pelotero más valioso?	Programa 22		
	12.4 Más sobre índices		Interactivo	
13. Simulación. Utilizar la simulación para resolver situaciones probabilísticas.	13.1 Simulación	Programa 23		
	13.2 Aplicando la simulación			
	13.3 Simulación y tiros libres	Programa 24	Interactivo	Simulación con el modelo de urna (1) (Hoja de cálculo)
EVALUACIÓN				

Bloque 3

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
14. Relaciones funcionales y expresiones algebraicas. **[12-21]** Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica.	14.1 El área de la imagen		Interactivo	
	14.2 El corral de los conejos	Programa 25		
	14.3 El medio litro de leche	Programa 26		
15. Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general. **[22-35]** Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la fórmula general.	15.1 La fórmula general			
	15.2 El beisbolista	Programa 27	Interactivo	
	15.3 Cuántas soluciones tiene una ecuación			
	15.4 La razón dorada	Programa 28		
16. Teorema de Tales. **[36-47]** Determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. Aplicar el teorema de Tales en diversos problemas geométricos.	16.1 La culpa es de las paralelas	Programa 29	Interactivo	Teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.2 Proporcionalidad contra paralelismo			Recíproco del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	16.3 Ahí está el teorema de Tales	Programa 30		
17. Figuras homotéticas. **[48-57]** Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o que −1. Determinar las propiedades que permanecen invariantes al aplicar una homotecia a una figura. Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.	17.1 Especialmente semejantes	Programa 31	Interactivo	La homotecia como aplicación del teorema de Tales (Geometría dinámica)
	17.2 Depende de la razón	Programa 32	Interactivo	
18. Gráficas de relaciones funcionales. **[58-67]** Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.	18.1 Plano inclinado	Programa 33	Interactivo	
	18.2 La ley de Boyle	Programa 34		
	18.3 La caja			
19. Algunas características de gráficas no lineales. **[68-93]** Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones.	19.1 ¡Abiertas y más abiertas!		Interactivo	Funciones cuadráticas (Hoja de cálculo)
	19.2 ¡Para arriba y para abajo!		Interactivo	
	19.3 Las desplazadas	Programa 35	Interactivo	
	19.4 ¡Ahí les van unas cúbicas!	Programa 36	Interactivo	
	19.5 ¡Ahí les van unas hipérbolas!	Programa 37	Interactivo	
	19.6 Efectos especiales		Interactivo	
20. Gráficas por pedazos. **[94-103]** Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	20.1 Las albercas		Interactivo	
	20.2 Diversos problemas	Programa 38	Interactivo	
EVALUACIÓN				

Bloque 4

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
21. Diferencias en sucesiones. **[106-119]** Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.	21.1 Números figurados	Programa 39	Interactivo	
	21.2 Las diferencias en expresiones cuadráticas			
	21.3 El método de diferencias	Programa 40		
	21.4 Apliquemos lo aprendido			
22. Teorema de Pitágoras. **[120-129]** Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	22.1 ¿Qué nos dice el teorema de Pitágoras?	Programa 41	Interactivo	Teorema de Pitágoras (Geometría dinámica)
	22.2 Aplicaciones del teorema de Pitágoras I	Programa 42	Interactivo	
	22.3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras II			
23. Razones trigonométricas. **[130-145]** Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.	23.1 La competencia		Interactivo	Ángulo de elevación y depresión (Hoja de cálculo)
	23.2 Cosenos y senos	Programa 43		
	23.3 30°, 45° y 60°			
	23.4 A resolver problemas	Programa 44	Interactivo	
24. El crecimiento exponencial y el lineal. **[146-159]** Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.	24.1 Crecimiento de poblaciones	Programa 45	Interactivo	
	24.2 Interés compuesto			
	24.3 Gráfica de una sucesión exponencial	Programa 46		
	24.4 La depreciación de las cosas	Programa 47	Interactivo	
25. Representación de la información. **[160-167]** Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.	25.1 Muchos datos	Programa 48	Interactivo	
	25.2 De importancia social			
EVALUACIÓN				

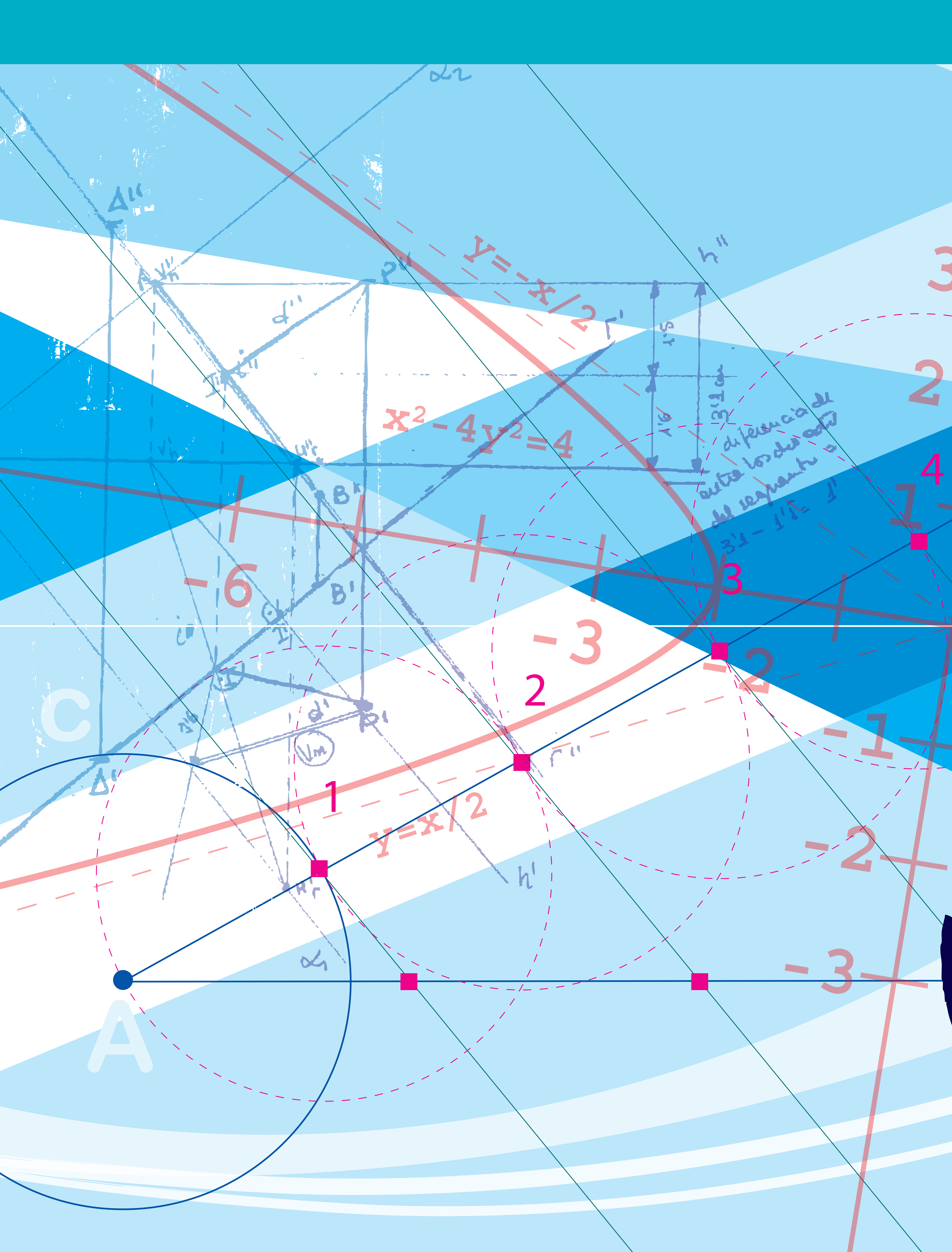
Bloque 5

SECUENCIA	SESIÓN	RECURSOS TECNOLÓGICOS		
		Programas	Interactivos	Aula de medios
26. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. **[170–175]** Dado un problema, determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver, y viceversa, proponer una situación que se modele con una de esas representaciones.	26.1 Los discípulos de Pitágoras			
	26.2 Ecuaciones y geometría	Programa 49	Interactivo	
27. Conos y cilindros. **[176–185]** Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera cono recto.	27.1 Sólidos de revolución	Programa 50	Interactivo	
	27.2 Cilindros rectos			
	27.3 Conos rectos	Programa 51		
	27.4 Secciones de corte		Interactivo	
28. Volumen del cono y del cilindro. **[186–191]** Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	28.1 Tinacos de agua		Interactivo	
	28.2 Conos de papel	Programa 52	Interactivo	
29. Estimar volúmenes. **[192–193]** Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.	29.1 Problemas prácticos	Programa 53 Programa 54	Interactivo	
30. Gráfica cajabrazos. **[194–205]** Interpretar, elaborar y utilizar gráficas de cajabrazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones.	30.1 Interpretación de datos	Programa 55		
	30.2 Construcción de la gráfica cajabrazos	Programa 56	Interactivo	
	30.3 Comparación de datos mediante la gráfica de cajabrazos	Programa 57		
EVALUACIÓN				

EJE 1:	Sentido numérico y pensamiento algebraico
EJE 2:	Forma, espacio y medida
EJE 3:	Manejo de la información

Clave de logos

Trabajo individual	Sitios de Internet
En parejas	Bibliotecas Escolares y de Aula
En equipos	Programa de Televisión
Todo el grupo	Interactivo
Conexión con otras asignaturas	Audiotexto
Glosario	Aula de Medios
Consulta otros materiales	Otros Textos
CD de recursos	


Y=-x/2
x²-4y²=4
y=x/2
diferencia de
entre los dos cotas
de los segmentos
C
A

BLOQUE 3

Relaciones funcionales y expresiones algebraicas

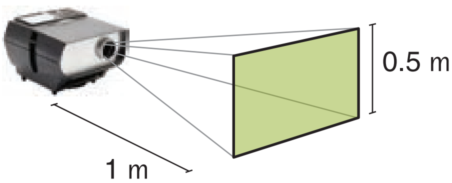
En esta secuencia encontrarás las expresiones algebraicas que corresponden a distintas relaciones funcionales.

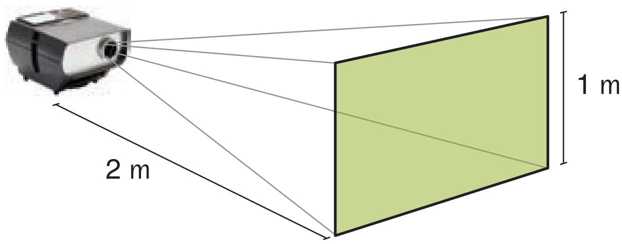
SESIÓN 1

EL ÁREA DE LA IMAGEN

>>> Para empezar

Cuando una imagen se proyecta sobre una pantalla, su tamaño aumenta. Dicho aumento puede ser mayor o menor dependiendo de la distancia a la que se encuentre el proyector respecto de la pantalla.





Más aún, la relación entre la distancia a la que se coloca el proyector y las dimensiones de la imagen (largo y ancho) es de proporcionalidad directa. Es decir, si se duplica, triplica, reduce a la mitad, etc. la distancia a la que se encuentra el proyector, se duplicarán, triplicarán, reducirán a la mitad, etc. el largo y el ancho de la imagen.

>>> Consideremos lo siguiente

En la imagen superior se está proyectando un cuadrado. Cuando el proyector se coloca a 1 m de distancia de la pantalla, la imagen proyectada resulta ser un cuadrado de lado 0.5 m.

a) Si el proyector se colocara a 2 m de distancia, ¿cuánto medirá el lado del cuadrado proyectado? ____________________ m; ¿cuál sería su área? ___________ m^2.

b) Si el proyector se colocara a 3 m, ¿cuál sería el área de la imagen proyectada? __________________ m^2.

c) ¿Y si se colocara a $\frac{1}{2}$ m? ____________________ m^2.

d) Escribe una expresión que sirva para calcular el área de la imagen proyectada a partir de la distancia a la que se encuentra el proyector. ______________________

Ayúdate de la expresión anterior para contestar la siguiente pregunta:

e) Si el proyector se colocara a 1.4 m de distancia, ¿cuál sería el área del cuadrado? ____________ m^2.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla.

Distancia del proyector a la pantalla (m)	Longitud del lado del cuadrado proyectado (m)	Área del cuadrado proyectado (m^2)
0.5		
1.0	0.5	0.25
1.5		
2.0		
2.5		
3.0		

II. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué operación hay que hacer para completar la segunda columna a partir de la primera? ____

b) Si se denota con la letra x a la distancia entre el proyector y la pantalla, ¿cuál es la expresión que representa la longitud del lado del cuadrado?

Lado = _______

c) ¿Qué operación hay que hacer para completar la tercera columna a partir de la segunda? ______________________

d) ¿Qué operaciones hay que hacer para completar la tercera columna a partir de la primera? ____

e) Si denotamos con la letra y el área de la imagen proyectada, ¿cuál es la expresión que relaciona y con x? y = ____________

Comparen sus respuestas y comenten si la relación entre la x y la y es de proporcionalidad directa.

III. Usen la expresión que encontraron para contestar lo siguiente:

a) Si el proyector se colocara a 3.7 m, ¿cuál sería el área de la imagen? ____________

b) Si se quiere que la imagen tenga un área de 2 m^2, ¿a qué distancia deberá colocarse el proyector? ____________

>>> A lo que llegamos

En algunas situaciones, como en el caso de la proyección, la relación entre dos cantidades x, y puede ser escrita de la forma $y = ax^2$, donde a es un número fijo. A esta relación se le conoce como relación cuadrática, pues la variable y depende del cuadrado de la variable x, es decir, de x^2.

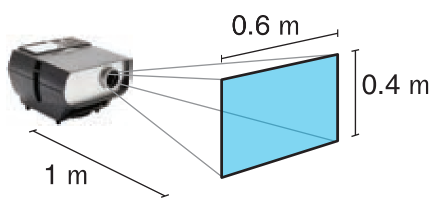
A diferencia de las relaciones de proporcionalidad directa, al incrementar al doble el valor de x no se duplica el valor de y, sino que se cuadruplica.

>>> Lo que aprendimos

1. Un proyector despliega un cuadrado de lado 30 cm al colocarse a 1 m de la pantalla. Al colocar el proyector a otra distancia x se producirá un cuadrado de una cierta área y en metros cuadrados, ¿cuál es la expresión que relaciona x con y?

$y =$ ____________

2. En la siguiente figura se muestran las medidas de un rectángulo que se proyectó a una distancia de 1 m. ¿Cuál sería el área de la imagen si se proyectara a una distancia de 4.3 m de la pantalla? ____________



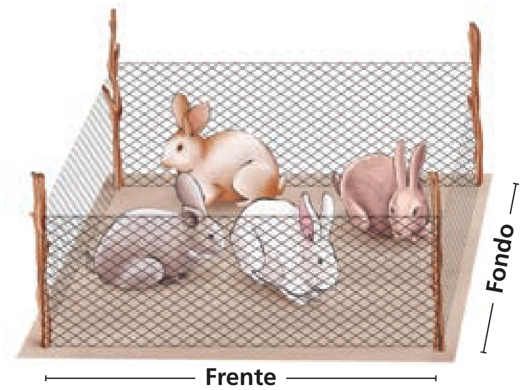
EL CORRAL DE LOS CONEJOS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Don Chon tiene una malla de 100 m de longitud para hacer un cerco. Ha decido usar el material para hacerle un corral rectangular a sus conejos. No sabe todavía de qué dimensiones hacerlo, pues quiere que sus conejos tengan el mayor terreno posible.

a) ¿De qué medidas se puede construir el corral rectangular usando los 100 m de malla? Encuentren cuatro posibilidades para el frente y cuatro para el fondo y anótenlas en las columnas **A**, **B**, **C** y **D**.



Rectángulo	**A**	**B**	**C**	**D**
Frente (m)				
Fondo (m)				

b) Calculen el área de cada uno de los corrales que propusieron.

Área de **A** = ________________ m^2. Área de **B** = ________________ m^2.

Área de **C** = ________________ m^2. Área de **D** = ________________ m^2.

c) ¿Cuál de los cuatro rectángulos que propusieron tiene mayor área? ____________

Comparen las medidas de los corrales que propusieron y elijan de entre todos ellos cuál es el que tiene mayor área.

>>> Consideremos lo siguiente

Para encontrar las medidas del corral que encierra la mayor área posible, conviene tener una expresión para el área.

Denoten con x la longitud del frente del corral. Recuerden que el corral debe usar los 100 m de malla.

a) ¿Cuál deberá ser la medida del fondo? **Fondo** = ________________________

b) Representen con la letra y el área del corral que mide x metros de frente y escriban una expresión que relacione x con y. y = ______________

Verifiquen que las expresiones que escribieron sirven para calcular el área de los corrales **A**, **B**, **C** y **D** a partir de las medidas de sus frentes.

>>> Manos a la obra

I. De las siguientes expresiones, ¿cuál es la que permite calcular el área y a partir de la medida del frente x? Subráyenla.

a) $y = 50x - x^2$

b) $y = 50x + x^2$

c) $y = x^2 - 50x$

d) $y = 50x^2 - x$

Comparen sus respuestas, comenten cómo hicieron para elegirla y decidan si esa expresión es equivalente a la que habían contestado en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

Recuerden que:

Se dice que dos expresiones son equivalentes si dan el mismo resultado al evaluarlas para todo valor.

Por ejemplo, al evaluar la expresión $2x + 2$ *en* $x = 5$ *da como resultado* **12**. *Ese mismo resultado se obtiene al evaluar la expresión* $2(x + 1)$ *en* $x = 5$. *Y al evaluar esas dos expresiones en cualquier otro valor de* x, *darán el mismo resultado. Por esa razón, las expresiones* $2x + 2$ *y* $2(x + 1)$ *son equivalentes.*

II. Escriban la expresión que eligieron en la actividad **I** en la casilla correspondiente a continuación, y después completen la tabla usando esa expresión.

x	5	10	15	20	25	30	35	40
$y =$ ______								

a) Si y vale 625, ¿cuál debe ser el valor de x? ______

b) ¿Puede ser y igual a 600? ______ . ¿Por qué? ______

______

c) ¿Puede ser y igual a 650? ______ . ¿Por qué? ______

______

Comparen sus respuestas y comenten si el valor de y puede ser mayor que 625.

>>> A lo que llegamos

Las relaciones de la forma $y = ax^2 + bx$ y, en particular, $y = ax^2$, son llamadas relaciones cuadráticas. Como se puede observar, la expresión para y contiene x^2, equis cuadrada.

Por ejemplo, las siguientes expresiones corresponden a relaciones cuadráticas:

- $y = 50x - x^2$
- $y = 50x + x^2$
- $y = x^2 - 50x$
- $y = 50x^2 - x$

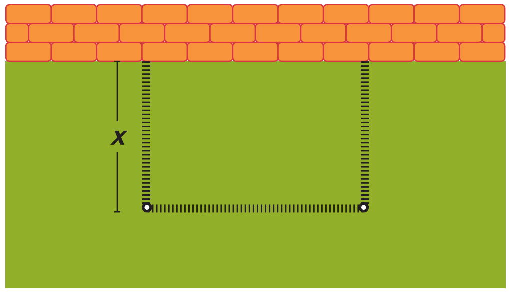
Para conocer más de las relaciones cuadráticas, pueden ver el programa *El área máxima*.

III. A don Chon le pareció que 625 m² era demasiada superficie y prefiere que el corral se reduzca a 400 m². De qué medidas puede hacerse el corral, haciendo uso de los 100 m de malla (sin que sobre malla) y cubriendo los 400 m² que quiere don Chon.

Frente = ________________ **Fondo** = ________________

>>> Lo que aprendimos

Se quiere cercar una región pegada a la paed de un jardín para sembrar chayotes, como se muestra en la figura. Pero sólo se cuenta con 50 m de malla para cercar y se quiere usar toda la malla. Escriban una expresión para calcular el área de la región de siembra a partir de la longitud x que se marca en la figura.



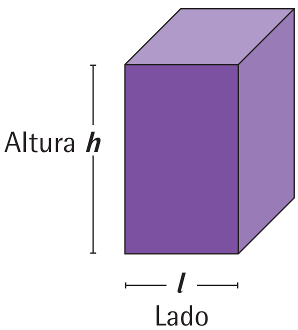
y = ______________________

EL MEDIO LITRO DE LECHE

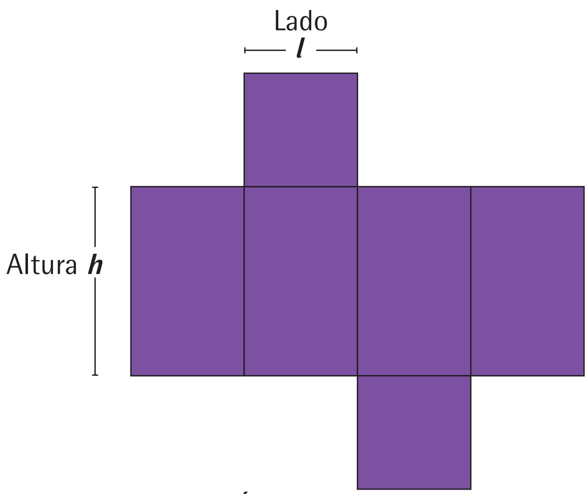
SESIÓN 3

>>> Para empezar

Una empresa empacadora de leche quiere hacer un recipiente de 500 ml. La forma del recipiente deberá ser un prisma rectangular con base cuadrada, como se muestra en la figura. El deseo de los fabricantes es hacer el empaque con la menor cantidad de material posible.



Volumen



Área

Para empezar a trabajar este problema, tenemos que recordar algunas cosas. Primero, el volumen de un prisma de base cuadrada se puede calcular multiplicando la medida de la altura por el cuadrado del lado de la base. Segundo, el material necesario para hacer la caja de leche se puede calcular usando el desarrollo plano del prisma (ver figura anterior). Por último, 500 ml equivalen a 500 cm^3.

En resumen, los productores de leche están buscando un prisma rectangular de base cuadrada con volumen de 500 cm^3 y cuyo desarrollo plano tenga la menor área posible.

>>> Consideremos lo siguiente

Diseñen un empaque de leche con la menor cantidad de material posible.

a) Busquen varias posibilidades y escriban en la siguiente tabla dos de sus mejores propuestas para obtener los empaques **A** y **B**.

Empaque	Lado (cm)	Altura (cm)	Volumen (cm^3)	Área del desarrollo plano (cm^2)
A			500	
B			500	

Recuerden que:

El volumen de un prisma de base cuadrada se puede calcular usando la siguiente fórmula:

$V = l^2 h$

Representen con la letra l el lado de la base y con la letra h la altura del empaque de 500 cm^3.

b) Escriban una expresión que permita calcular h a partir de l.

h = ______________________

c) Escriban una expresión que permita calcular el área **A** del desarrollo plano únicamente a partir de l (la medida del lado de la base).

A = ______________________

Recuerden que:

Para calcular el área del desarrollo plano de un prisma rectangular se usa la siguiente fórmula:

$A = 4lh + 2l^2$

Comparen las medidas de sus diseños propuestos y decidan cuál de ellos requiere menor cantidad de material. Por último, verifiquen si la expresión que encontraron en el inciso c) sirve para calcular el área del desarrollo plano a partir del lado l en cada uno de los empaques **A** y **B**.

>>> Manos a la obra

I. Para encontrar la expresión que permita calcular h a partir de l, contesten las siguientes preguntas.

a) Si el lado de la base es de 4 cm, ¿cuánto debe medir la altura? _______________

b) Si el lado de la base es de 5 cm, ¿cuánto debe medir la altura? _______________

c) Si lado de la base es muy grande, ¿qué ocurre con la altura? _______________

d) Si el lado de la base es muy pequeño, ¿qué ocurre con la altura? _______________

e) ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular h a partir de l? Subráyenla.

- $h = 500 + l^2$
- $h = \frac{500}{l^2}$
- $h = 500\, l^2$
- $h = \frac{500}{l}$

Comparen sus respuestas. Verifiquen que la expresión que escogieron sí sirve para algunos valores de l.

II. La fórmula $A = 4lh + 2l^2$ permite calcular el área A del desarrollo plano de un prisma rectangular de base cuadrada, donde l es el lado de la base y h es la altura del prisma. Esta fórmula no es la que sirve para calcular A únicamente a partir de l, pues se necesita además el valor de h.

En esta fórmula, sustituyan la expresión que encontraron para calcular h a partir de l. Completen:

$$A = 4l\,(\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ ) + 2l^2$$

La expresión ahora obtenida sí sirve para calcular A únicamente a partir de l.

Usando la expresión que encontraron, contesten las siguientes preguntas:

a) Si el lado de la base es de 4 cm, ¿cuál deberá ser el área del desarrollo plano?

____

b) ¿Y si el lado de la base es de 5 cm? _______________

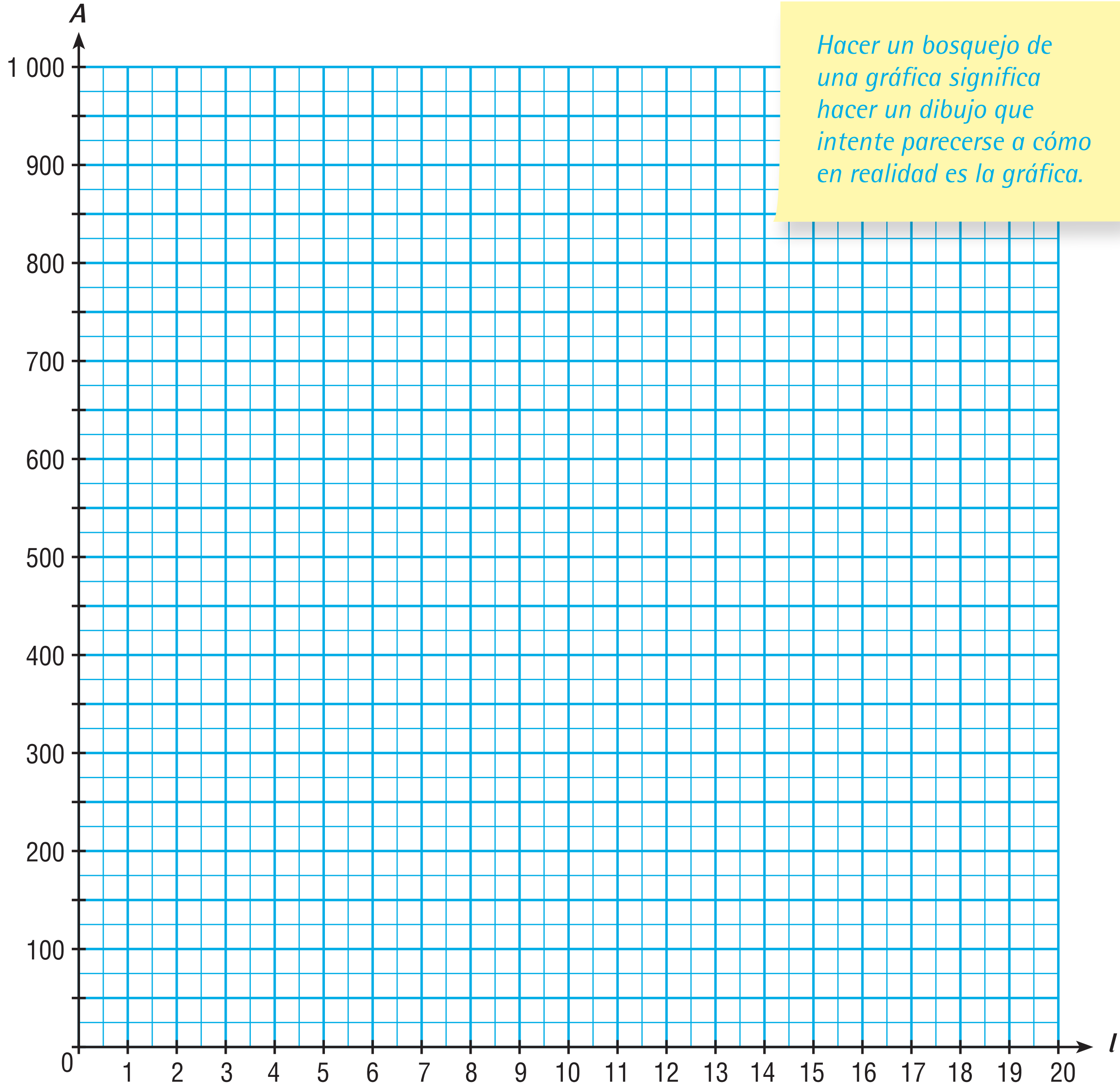
c) Usando la expresión que encontraron, llenen la siguiente tabla:

l	2	4	6	8	10	12	14
$A =$ ____________							

Comparen sus respuestas. Comenten:

¿Siempre es posible calcular el área sabiendo cuánto mide el lado?, ¿qué ocurre con el área cuando el valor de l es muy pequeño?, ¿qué pasa con el área cuando el valor de l es muy grande?

III. Con los datos en la tabla hagan la gráfica de la relación.



Hacer un bosquejo de una gráfica significa hacer un dibujo que intente parecerse a cómo en realidad es la gráfica.

Observen la gráfica que construyeron y traten de encontrar un valor de ***l*** donde el valor de ***A*** sea más chico de lo que han encontrado. ***l*** = ____________

>>> A lo que llegamos

Algunas relaciones entre cantidades no son lineales ni cuadráticas. Por ejemplo, la relación $y = \frac{2\,000}{x} + 2x^2$ no es lineal, pues su gráfica no es una recta, y tampoco es cuadrática. Las cuadráticas son únicamente aquellas que se pueden expresar en la forma $y = ax^2 + bx + c$ (b y c pueden ser cero) y la expresión $y = \frac{2\,000}{x} + 2x^2$ no cumple esta condición.

Para conocer más ejemplos de relaciones no lineales , pueden ver el programa *Usos de las relaciones funcionales*.

>>> Lo que aprendimos

1. Denota con x la medida (en cm) de la arista de un cubo y con la letra y el área de su desarrollo plano (en cm²). Escribe una expresión que relacione x con y.

   $y =$ ____________________

   Si el desarrollo plano tiene un área de 600 cm², ¿cuánto debe medir la arista?

   ____

2. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son cuadráticas? Subráyalas.

   a) $y = 2x^2 + 3$

   b) $y = 6x + 2$

   c) $y = x\,(x + 1)$

   d) $y = x\,(x^2 + 1)$

>>> Para saber más

Sobre problemas de máximos y mínimos, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/ac_maximos/index.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia, España.

Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general

En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que corresponden a ecuaciones cuadráticas en las que se utiliza la fórmula general para encontrar sus soluciones.

SESIÓN 1

LA FÓRMULA GENERAL

>>> Para empezar

En las secuencias 8 y 9 de **Matemáticas III**, volumen I, resolviste ecuaciones cuadráticas usando tus propios procedimientos, operaciones inversas o la factorización.

Hace varios siglos los matemáticos dedujeron una fórmula para resolver cualquier ecuación cuadrática. Esta fórmula puede ser muy útil para resolver aquellas ecuaciones en las que resulta difícil utilizar alguno de los procedimientos anteriores.

>>> Consideremos lo siguiente

Resuelve el siguiente acertijo:

Luz pensó un número, lo elevó al cuadrado y multiplicó el resultado por 10.

A lo obtenido le sumó tres veces el número que pensó y, al final, para su sorpresa, obtuvo 1.

Se sabe que Luz realizó correctamente todas las operaciones.

Hay dos números que pudo haber pensado Luz: _________ o bien _________

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿Pudieron encontrar los posibles números que pensó Luz?

b) ¿Qué procedimientos usaron para encontrarlos?

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para tratar de resolver la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ y encontrar los posibles números que pensó Luz. En la última columna calculen el valor que obtienen al evaluar la expresión algebraica del lado izquierdo de la ecuación, para cada uno de los valores de x.

Valor de x	x^2	$10x^2$	$3x$	$10x^2 + 3x$
1	$(1)^2 = 1$	10 (1) = 10	3 (1) = 3	
3	$(3)^2 = 9$	10 (9) = 90	3 (3) = 9	
2				
0				
0.5				
–1				

a) ¿Entre qué números enteros creen que se encuentra uno de los números que pensó Luz? ______________________________. Justifiquen su respuesta.

b) ¿Entre qué números fraccionarios creen que se encuentra uno de los números que pensó Luz? ______________________________. Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas y comenten las dificultades que tuvieron para encontrar las dos soluciones de la ecuación $10x^2 + 3x = 1$.

II. Para encontrar los dos posibles números que pensó Luz, resuelvan la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ primero escribiéndola en su ***forma general*** y luego usando la ***fórmula general***. Esto es:

Dada una ecuación en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones se encuentran con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En esta fórmula a y b son los coeficientes de los términos de segundo y primer grado respectivamente, mientras que c es el término independiente.

El signo ± que antecede al radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ indica que una vez obtenido el valor numérico de $b^2 - 4ac$, una de las soluciones se obtiene al considerar el signo "+" y la otra el signo "–". Las dos soluciones de la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Recuerden que:

Una ecuación cuadrática puede tener hasta dos soluciones.

a) Pasen la ecuación $10x^2 + 3x = 1$ a su forma general.

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = 0$$

b) Encuentren los valores del término independiente y de los coeficientes de los términos cuadrático y lineal.

$a =$ __________

$b =$ __________

$c =$ __________

c) En la fórmula general, sustituyan a, b, c por sus respectivos valores y realicen las operaciones hasta obtener las dos soluciones de la ecuación.

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{9 + 40}}{2(\quad)} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{20} =$$

$$x_2 = \frac{-3 - 7}{20} =$$

d) Verifiquen sus soluciones sustituyéndolas en la ecuación $10x^2 + 3x = 1$.

Sustituyan por el valor de x_1:

$10(\underline{\qquad})^2 + 3(\underline{\qquad}) = 1$

Sustituyan por el valor de x_2:

$10(\underline{\qquad})^2 + 3(\underline{\qquad}) = 1$

Comparen sus soluciones y comenten: ¿cuáles son los números que pudo haber pensado Luz?

>>> A lo que llegamos

La **fórmula general** se puede usar para resolver cualquier ecuación de segundo grado. Por ejemplo, para resolver una ecuación como $5x^2 + 6x = -1$, se hace lo siguiente:

1° Se escribe la ecuación en su forma general. $5x^2 + 6x + 1 = 0$

2° Se obtienen los valores de a, b, c. $a = 5, \quad b = 6, \quad c = +1$

3° En la fórmula general, se sustituyen a, b, c por sus respectivos valores.

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(5)(1)}}{2(+5)}$$

4° Se realizan las operaciones indicadas.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \frac{-6 \pm 4}{10}$$

5° Se obtienen las soluciones.

$$x_1 = \frac{-6 + 4}{10} = \frac{-2}{10} = -0.2$$

$$x_2 = \frac{-6 - 4}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

6° Se verifican las soluciones en la ecuación original $5x^2 + 6x = -1$.

Para $x_1 = -0.2$

$$5(-0.2)^2 + 6(-0.2) = -1$$
$$5(+0.04) - 1.2 = -1$$
$$0.2 - 1.2 = -1$$
$$-1 = -1$$

Para $x_2 = -1$

$$5(-1)^2 + 6(-1) = -1$$
$$5(+1) - 6 = -1$$
$$+5 - 6 = -1$$
$$-1 = -1$$

III. ¿Qué procedimiento usarían (factorización, operaciones inversas o la fórmula general), para resolver cada una de las siguientes ecuaciones? Justifiquen su respuesta.

Ecuación	Procedimiento	Justificación
$7x^2 + 4x = 1$		
$2x^2 = 50$		
$3x^2 + 6x = 0$		

Discutan las ventajas y desventajas de los siguientes procedimientos para resolver una ecuación de segundo grado.

- Usando operaciones inversas o procedimientos aritméticos.
- Factorización.
- Fórmula general.

>>> Lo que aprendimos

Resuelve las siguientes ecuaciones usando la fórmula general. Verifica las soluciones en tu cuaderno.

1. $4x^2 + 4x = -1$

a = ________ b = ________ c = ________

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

x_1 = ________

x_2 = ________

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ________

b) ¿Cuál es el valor de $b^2 - 4ac$? ________

2. $2x^2 + 8x - 4.5 = 0$

a = ________ b = ________ c = ________

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

x_1 = ________

x_2 = ________

3. $5x^2 - 20 = 0$

a = ________ b = ________ c = ________

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

x_1 = ________

x_2 = ________

EL BEISBOLISTA

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

Un bateador conecta un elevado, y la pelota de beisbol cae al suelo sin que ningún jugador del equipo contrario logre atraparla.

Cuando el bateador golpea la pelota, ésta se encuentra a una altura de 0.605 m.

La trayectoria que sigue la pelota está dada por la ecuación:

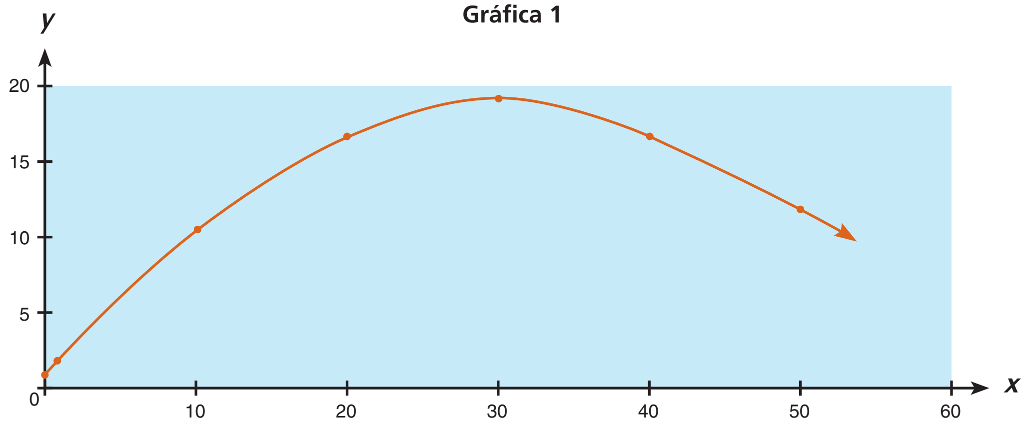
$$y = -0.02x^2 + 1.2x + 0.605$$

x representa la distancia horizontal recorrida por la pelota.

y representa la altura a la que se encuentra la pelota.

En la gráfica 1 se muestra una parte de la trayectoria que siguió la pelota.

Gráfica 1



¿Cuántos metros avanzó horizontalmente la pelota desde que fue golpeada por el bateador hasta que cayó al suelo? ____________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Observen la gráfica 1 y usen la siguiente tabla para tratar de encontrar cuántos metros recorrió horizontalmente la pelota.

a) ¿Por qué la gráfica de la trayectoria no pasa por el origen del plano cartesiano (0,0)? ______________________________

____

b) ¿Cuál es el valor de y cuando la pelota cae al suelo? ____________

c) ¿Entre qué números enteros se encontrará el valor de x para que el valor de y sea 0? ____________ . Justifiquen su respuesta.

d) Usen la calculadora y prueben con tres valores para tratar de encontrar alguna de las soluciones de la ecuación. Registren sus resultados en la tabla.

x	y
0	0.605
10	10.605
20	16.605
30	18.605
40	16.605
50	10.605

Comparen sus respuestas y comenten cómo encontraron el valor de x cuando la pelota toca el suelo.

II. De lo anterior se desprende que la ecuación que tienen que resolver para encontrar la distancia horizontal recorrida por la pelota desde que fue golpeada hasta que cayó al suelo es: $-0.02x^2 + 1.2x + 0.605 = 0$.

Resuelvan la ecuación usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pueden realizar las operaciones con una calculadora.

$$x = \frac{-(1.2) \pm \sqrt{(1.2)^2 - 4(-0.02)(0.605)}}{2(-0.02)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

Comparen sus respuestas y comenten cómo interpretan la solución negativa de la ecuación.

>>> Lo que aprendimos

Para conocer más ejemplos del uso de la formula general pueden ver el programa *Resolución de ecuaciones cuadráticas por la fórmula general*.

1. La trayectoria que sigue la pelota al ser bateada por otro jugador está dada por la ecuación: $y = -0.02x^2 + 1.2x + 0.605$, donde x representa la distancia horizontal recorrida por la pelota y donde y representa la altura a la que se encuentra la pelota.

   ¿A qué distancia horizontal del bateador se encuentra la pelota cuando está a 5.085 m de altura? ______________

2. Resuelve las ecuaciones siguientes usando la fórmula general. Verifica las soluciones en tu cuaderno.

   a) $x^2 + 12x = -9$

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

b) $2x^2 + 8x - 4.5 = 0$

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

c) $x^2 - 3x + 0.6875 = 0$

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

¿CUÁNTAS SOLUCIONES TIENE UNA ECUACIÓN?

SESIÓN 3

>>> Para empezar

Mientras que las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen a lo más una solución, las ecuaciones de segundo grado con una incógnita pueden tener dos, una o ninguna solución.

En las sesiones anteriores trabajaste con ecuaciones donde casi todas tenían dos soluciones, ahora trabajarás con ecuaciones que tienen dos, una o ninguna solución. Cuando se usa la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática, se puede saber fácilmente cuántas soluciones tiene. ¡Sólo hay que analizar el valor del ***discriminante***: ***$b^2 - 4ac$***!

>>> Consideremos lo siguiente

Escribe un término independiente de modo que la ecuación tenga tantas soluciones como se indica en el paréntesis de la derecha. Escribe en cada caso las soluciones.

a) $3x^2 + 4x$ ________ $= 0$. (dos soluciones). Las soluciones son: ______ y ______

b) $3x^2 + 4x$ ________ $= 0$. (una solución). La solución es: ________

c) $3x^2 + 4x$ ________ $= 0$. (ninguna solución). No tiene solución porque ________

____

Comparen sus soluciones y compartan los procedimientos que siguieron para obtenerlas.

>>> Manos a la obra

I. Usen la fórmula general para resolver la ecuación $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

a) ¿Qué valor tiene el discriminante? $b^2 - 4ac =$ ____________

b) ¿Cuántas soluciones diferentes tiene la ecuación? ____________

II. Resuelvan la ecuación $5x^2 + 2x + 0.2 = 0$

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

a) ¿Qué valor obtuvieron para el discriminante? $b^2 - 4ac =$ ____________

b) ¿Son iguales o diferentes las soluciones? ____________________________

c) De acuerdo con lo anterior, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación? ____________

III. Ahora resuelvan la ecuación $5x^2 + 2x + 3 = 0$.

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

a) ¿Qué valor tiene el discriminante? $b^2 - 4ac =$ ____________

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ____________

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene el número 1? ________ . ¿Cuáles son? ___________

b) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene 0? ________ . ¿Cuáles son? ___________

c) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene el número negativo –56? ________ ¿Cuáles son las raíces cuadradas de –56? ____

IV. Contesten lo que se les pide a continuación.

a) Para la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al discriminante? Tomen en cuenta que los valores de a y de b están dados en la ecuación.

- $42 - 4(3)(0)$
- $3 - 4c$
- $16 - 12c$

b) ¿Cuánto tiene que valer c para que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$ sea igual a cero? $c =$ ________________

c) Sustituyan el valor que obtuvieron para c y solucionen la ecuación correspondiente.

$3x^2 + 4x + (\quad) = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

d) Encuentren un valor de c para que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$ sea positivo. $c =$ __________

e) Sustituyan el valor que obtuvieron para c y resuelvan la ecuación correspondiente.

$3x^2 + 4x + (\quad) = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

f) Encuentren un valor de c para que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 4x + c = 0$ sea negativo. $c =$ __________

g) Sustituyan el valor que obtuvieron para c y solucionen la ecuación correspondiente.

$3x^2 + 4x + (\quad) = 0$

$x_1 =$

$x_2 =$

>>> A lo que llegamos

Podemos determinar el número de soluciones que tiene una ecuación cuadrática con una incógnita a partir del valor del discriminante, $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución. En este caso se dice que la solución es doble.

Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene ninguna solución que sea un número entero, fracción común o decimal.

>>> Lo que aprendimos

1. A partir de los datos de cada renglón, escribe la ecuación, el procedimiento que usarías para resolverla o las soluciones que tiene.

Ecuación	Procedimiento recomendable para resolverla	Soluciones
$x^2 - 3x - 28 = 0$		
$5x^2 = 60$	Operaciones inversas	
$3x^2 - 4x + 10 = 0$		Ninguna
$x^2 + 2x - 35 = 0$	Factorización	
		2 y –5
	Fórmula general	–3.5
$0.25x^2 - 4x + 16 = 0$		
$x^2 - x + 1 = 0$		
		$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ y $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$
		Ninguna

LA RAZÓN DORADA

SESIÓN 4

>>> Para empezar

Grandes pintores clásicos tales como Leonardo da Vinci, Rafael y Miguel Ángel, entre otros, usaron la ***razón dorada*** (una relación entre las medidas del largo y del ancho de un rectángulo de tal manera que la figura resultara agradable a la vista), para hacer sus extraordinarias obras.

Para que el rectángulo **ABCD** sea un rectángulo dorado, debe ser semejante al rectángulo **EBCF**, que se construye con las medidas indicadas en la figura 1.

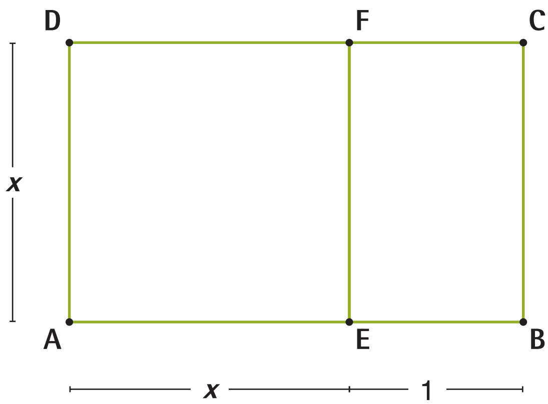


Figura 1

El valor de x se conoce como la ***razón dorada*** y se obtiene al resolver la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{x} = \frac{x}{\overline{EB}}$$

Donde $x = \overline{AD} = \overline{EF}$

>>> Consideremos lo siguiente

Para encontrar el valor de la razón dorada, se puede resolver la ecuación de segundo grado que se obtiene de la razón de semejanza de rectángulos **ABCD** y **EBCF** de la figura 1. Al sustituir los datos de la figura 1 en la proporción anterior resulta la ecuación:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

¿Cuál es el valor de la razón dorada? ____________________

Comparen sus soluciones y comenten: ¿Qué ecuación se obtiene al aplicar los productos cruzados en la ecuación $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$? ____________________

>>> Manos a la obra

a) Escriban la ecuación $x + 1 = x^2$ en su forma general: ______________________

b) Usen la fórmula general para obtener las dos soluciones de la ecuación. Pueden usar la calculadora para realizar las operaciones.

$$x = \frac{-(\quad) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4(\quad)(\quad)}}{2(\quad)} =$$

$x_1 =$

$x_2 =$

Recuerden que:

La raíz cuadrada de 5 tiene una infinidad de cifras decimales: $\sqrt{5} = 2.23606679...$

Una aproximación con 3 cifras decimales es $\sqrt{5} \cong 2.236$, *donde el símbolo* $\cong$ *se lee:*

"es igual aproximadamente a".

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿Cuál de las dos soluciones de la ecuación $x + 1 = x^2$ no es la razón dorada? Argumenten su respuesta.

b) ¿Por cuánto hay que multiplicar la medida del ancho para obtener el largo de un rectángulo dorado?

>>> A lo que llegamos

Es posible que, al aplicar la fórmula general de segundo grado, la raíz cuadrada ($\sqrt{b^2 - 4ac}$) tenga un número infinito de cifras decimales que no siguen un patrón o regularidad. Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$3x^2 + 5x + 1 = 0,$$

usando la fórmula general se tiene:

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-(5) \pm \sqrt{13}}{6}$$

Como $\sqrt{13} = 3.6055512\ldots$ tiene un número infinito de cifras decimales que no siguen algún patrón o regularidad, las soluciones se pueden dejar indicadas como:

$$x_1 = \frac{-(5) + \sqrt{13}}{6} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-(5) - \sqrt{13}}{6}.$$

También se pueden expresar como una aproximación que tenga cierto número de cifras decimales:

$$x_1 = \frac{-(5) + \sqrt{13}}{6} = 0.101$$

$$x_2 = \frac{-(5) - \sqrt{13}}{6} = -1.101$$

>>> Lo que aprendimos

Usa la razón dorada para encontrar la medida faltante de cada objeto, luego en tu cuaderno haz sus correspondientes dibujos de forma tal que la tarjeta de presentación quede dentro de la ficha bibliográfica y ésta dentro de la ficha de investigación (observa otra vez la figura 1 del apartado *Para empezar*).

Objeto	Largo del rectángulo	Ancho del rectángulo
Ficha de investigación	20.3 cm	
Ficha bibliográfica		7.7 cm
Tarjeta de presentación	9.2 cm	

>>> Para saber más

Sobre la resolución de ecuaciones de segundo grado, consulta:
http://www.emathematics.net/es/ecsegundogrado.php?a = 1&tipo = numero
Ruta 1: Ecuaciones de 2° grado → Resolución ecuación completa
Ruta 2: Ecuación de 2° grado → Problemas
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

También puedes consultar:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm
Ruta 1: Solución general
Ruta 2: Problemas de aplicación
Ruta 3: Ejercicios
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Hernández, Carlos. "Funciones cuadráticas" en *Matemáticas y deportes*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Ruiz, Concepción y Sergio de Regules. "Leonardo y los conejos" en *El piropo matemático, de los números a las estrellas*. México: SEP/Editorial Lectorum, Libros del Rincón, 2003.

Ruiz, Concepción y Sergio de Regules. "Ecuaciones cuadráticas" en *Crónicas algebraicas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

SECUENCIA 16

Teorema de Tales

En esta secuencia determinarás el teorema de Tales y conocerás cómo dividir un segmento en una razón dada.

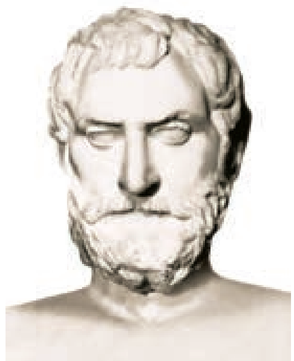
SESIÓN 1

LA CULPA ES DE LAS PARALELAS

>>> Para empezar

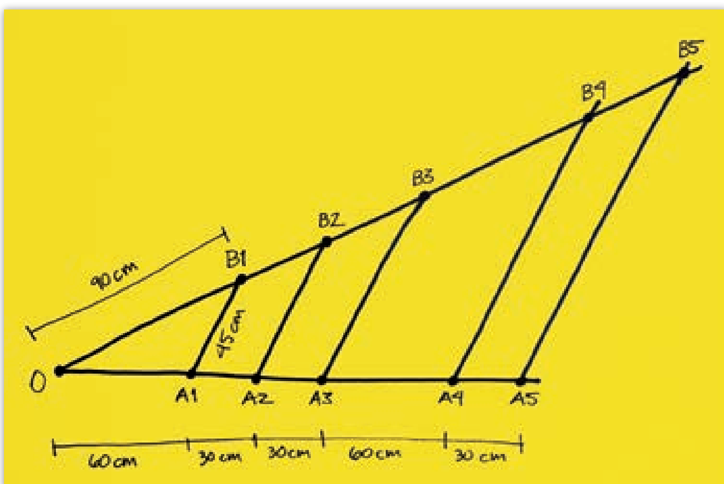
Tales de Mileto

Tales es considerado uno de los siete sabios de la antigüedad, junto con Bías de Priene, Quilón de Esparta, Cleóbulo de Lindos, Periandro de Corinto, Pitaco de Mitilene y Solón de Atenas. Tales fue comerciante, filósofo, astrónomo y matemático. A él se atribuye haber enunciado y probado el resultado matemático llamado *Teorema de Tales*, que estudiarás en esta secuencia.



>>> Consideremos lo siguiente

Marta quiere comprar los vidrios para la ventana de su estudio. Hizo un dibujo para anotar las medidas de los vidrios pero no pudo tomarlas todas. Decidió mostrar su dibujo al señor de la vidriería para pedirle que fuera él a terminar de medir los vidrios. Cuando el señor vio el dibujo, observó que los segmentos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 y A_5B_5 eran paralelos y le dijo a Marta que con las medidas anotadas se podían conocer las faltantes. El dibujo de Marta es el siguiente.



a) ¿Estás de acuerdo que con las medidas anotadas se pueden obtener las que faltan? __________ . ¿Por qué? ____

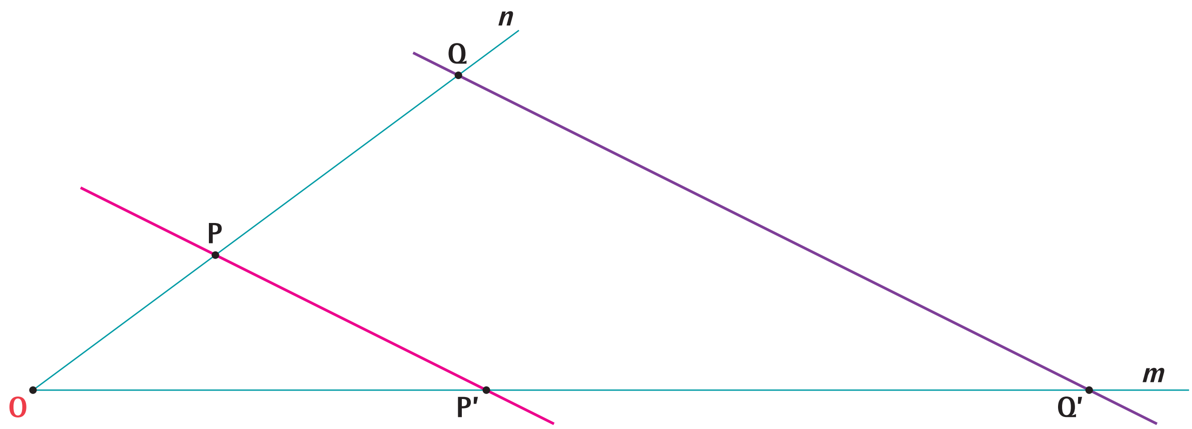
b) Anota en el dibujo de Marta las medidas faltantes.

c) Describe el procedimiento que utilizaste para determinar la medida del segmento A_5B_5. ____

Comparen sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. En el siguiente dibujo las rectas ***n*** y ***m*** se intersecan en el punto **O**. Las rectas paralelas **PP′** y **QQ′**, forman parte de los triángulos **OPP′** y **OQQ′**.



a) ¿El triángulo **OPP'** es semejante al triángulo **OQQ'**? __________ . Justifica tu respuesta. ____

b) Elige un punto de la recta ***n*** y llámalo **R**. Traza una paralela a la recta **PP′** que pase por **R**. Al punto de intersección de esta paralela con la recta ***m*** llámalo **R′**.

Sin medir, determina si los triángulos **ORR′** y **OPP′** son semejantes y argumenta tu respuesta. ____

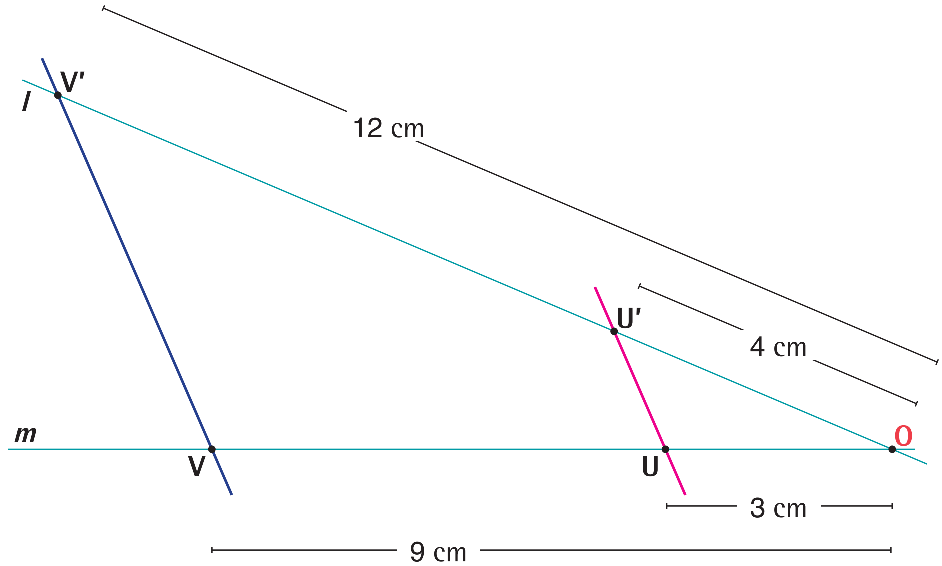
Comenten y argumenten: ¿Son semejantes los triángulos **ORR′** y **OQQ′**?

Cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, se cumple que los triángulos formados son semejantes.

II. En el siguiente esquema se trazaron rectas paralelas **UU'** y **VV'** para formar los triángulos semejantes **OUU'** y **OVV'**.

Recuerda que:

La razón de semejanza de un triángulo A con respecto a un triángulo B se calcula dividiendo la medida de un lado del triángulo A entre la medida del lado correspondiente en el triángulo B.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza del triángulo **OVV'** con respecto al triángulo **OUU'**? ____________

b) Sólo una de las siguientes igualdades es verdadera. Enciérrala en un círculo.

$(OV)\,(OV') = (OU)\,(OU')$ $\qquad \dfrac{OV}{OV'} = \dfrac{OU}{OU'}$ $\qquad \dfrac{OV}{OU'} = \dfrac{OV'}{OU}$

c) De la semejanza de los triángulos **OVV'** y **OUU'** se obtiene la igualdad $\dfrac{OV}{OU} = \dfrac{OV'}{OU'}$.

Describe un procedimiento para llegar de $\dfrac{OV}{OU} = \dfrac{OV'}{OU'}$ a la igualdad que encerraste.

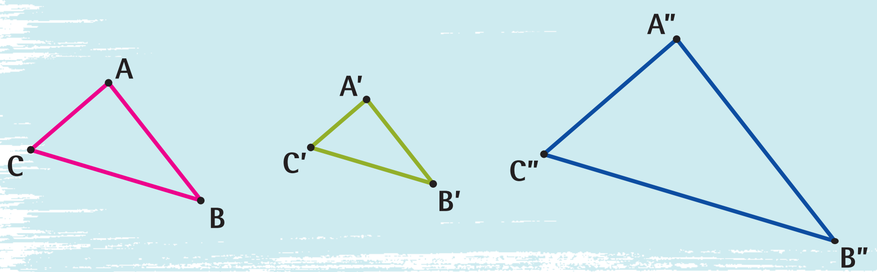
____

____

____

El procedimiento anterior muestra que:

En un conjunto de triángulos semejantes, la razón entre las medidas de dos lados de un triángulo es igual a la razón entre las medidas de los dos lados correspondientes de cada uno de los otros triángulos.



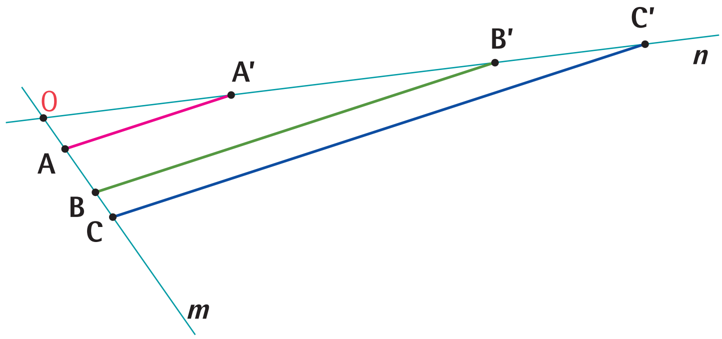
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A''B''}{A''C''}$$

III. En la siguiente figura se trazaron las rectas ***m*** y ***n*** que se intersecan en **O** y, también, se trazaron las paralelas **AA′**, **BB′**, **CC′**, las cuales en su intersección con la recta ***m*** forman los segmentos **OA**, **AB**, **BC**, **OB**, **AC** y **OC**.

a) Escribe los segmentos que forman las paralelas en su intersección con la recta ***n***

____

b) ¿Cuál es el segmento correspondiente a $\overline{\text{OA}}$? ______________ ¿Y el segmento correspondiente a $\overline{\text{BC}}$? ________________



c) Considera las medidas que se dan de algunos de los segmentos y completa la tabla.

Recta *m*	**Recta *n***	**Razón entre las medidas de los segmentos formados por las paralelas**	
$\overline{OA} = 5$	$\overline{OA'} = 25$	$\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} =$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{OB} - \overline{OA}}{\overline{OB'} - \overline{OA'}} =$
$\overline{OB} =$	$\overline{OB'} = 60$	$\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} =$	$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{OC} - \overline{OB}}{} =$
$\overline{OC} = 16$	$\overline{OC'} =$	$\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} =$	$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} =$

d) ¿Qué segmentos utilizaste para obtener $\overline{\text{B'C'}}$? ________________________________

e) ¿Qué segmentos utilizaste para obtener $\overline{\text{A'C'}}$? ________________________________

f) ¿Las medidas de los segmentos formados por las paralelas en la recta ***m*** son proporcionales a las medidas de los segmentos formados en la recta ***n***? ____________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

Observa que para formar las razones entre las medidas de los segmentos correspondientes, siempre se tomaron las medidas de los segmentos formados en la recta ***m*** como numeradores y las de los segmentos formados en la recta ***n*** como denominadores. ¿Qué pasa si se toman al revés?, ¿los segmentos en ***m*** siguen siendo proporcionales a los segmentos correspondientes en ***n***?

g) Traza en tu cuaderno dos rectas que se intersequen y denótalas con ***p*** y ***q*** respectivamente; traza a demás tres rectas transversales que intersequen a ***p*** y ***q*** y paralelas entre sí. ¿Son proporcionales las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a la recta ***p*** con respecto a las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a la recta ***q***?

_____________ . Justifica tu respuesta. ____

____

____

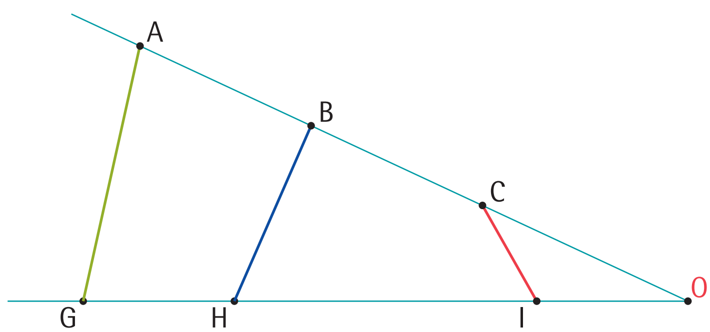
Observen que sólo algunos de los segmentos que se forman son lados de triángulos, el resto son segmentos comprendidos entre dos paralelas. De la actividad **III** se puede concluir lo siguiente:

>>> A lo que llegamos

Cuando dos rectas que se intersecan son cortadas por dos o más paralelas, se cumple que las medidas de los segmentos formados por las paralelas que intersecan a una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes formados por las paralelas que intersecan a la otra. A este enunciado se le conoce como teorema de Tales.

Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y utilicen el teorema de Tales para verificar sus respuestas.

IV. Mide los segmentos y determina las razones.



a) $\frac{OI}{OC}$ = _____________ $\frac{IH}{CB}$ = _____________ $\frac{HG}{BA}$ = _____________

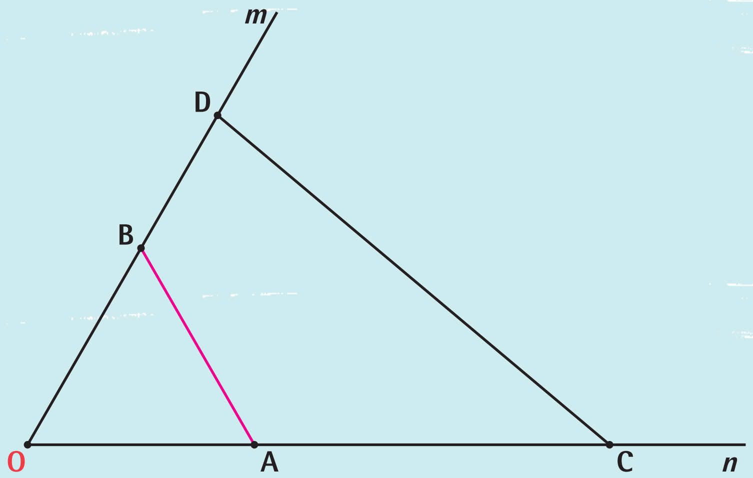
b) ¿Las medidas de los segmentos formados sobre una de las rectas son proporcionales a las medidas de los segmentos correspondientes en la otra recta?

____________________ . ¿Por qué? ____________________

____

c) ¿Los segmentos **AG**, **BH** y **CI** son paralelos entre sí? ____________________

Si dos rectas que se intersecan son cortadas por rectas no paralelas, las medidas de los segmentos formados en una de las rectas no necesariamente son proporcionales a las medidas de los segmentos formados en la otra recta. Por ejemplo, en la figura las rectas *m* y *n* son intersecadas por dos rectas no paralelas.



Las medidas de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{OC}$ no son proporcionales a las medidas de los segmentos $\overline{OB}$, $\overline{BD}$, $\overline{OD}$.

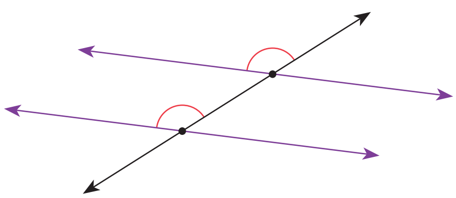
PROPORCIONALIDAD CONTRA PARALELISMO

SESIÓN 2

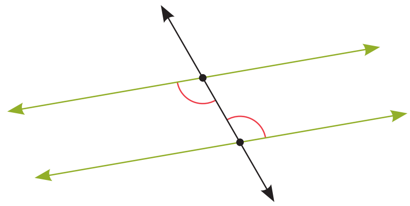
>>> Para empezar

En la secuencia 6 de **Matemáticas II**, volumen I, estudiaron las relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal:

a) Se forman ángulos correspondientes iguales.



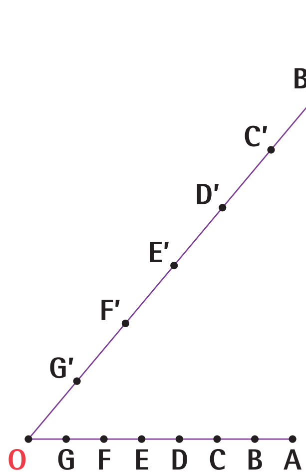
b) Se forman ángulos alternos internos y alternos externos que miden lo mismo.



A la inversa se cumple que, si dos rectas son cortadas por una transversal y los ángulos correspondientes miden lo mismo, **las rectas son paralelas**.

>>> Consideremos lo siguiente

El segmento **OA** se dividió en 7 partes iguales cuyas longitudes son todas de 0.5 cm y el segmento **OA'** se dividió en 7 partes iguales de 1 cm cada una.



a) ¿Las medidas de los segmentos **OE** y **EA** son proporcionales a las medidas de los segmentos **OE'** y **E'A'**? ____________ . ¿Por qué? ______________________________________

____

b) ¿Son paralelos los segmentos **AA'** y **EE'**? ________________ . Justifica tu respuesta.

____

____

c) ¿Son paralelos los segmentos **GG'** y **BB'**? ________________ . Justifica tu respuesta.

____

____

____

>>> Manos a la obra

I. Traza los segmentos **FF'** y **CC'**.

a) ¿Los triángulos **FOF'** y **COC'** son semejantes? ___________ . Justifica tu respuesta.

____

____

b) Calcula las razones que se piden.

$\frac{\overline{OF}}{\overline{OF'}} =$ $\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} =$ $\frac{\overline{FC}}{\overline{F'C'}} =$

¿Son proporcionales las medidas de los segmentos **OF**, **OC** y **FC** con respecto a las medidas de los segmentos **OF'**, **OC'** y **FC'**? _____________ . Justifica tu respuesta.

____

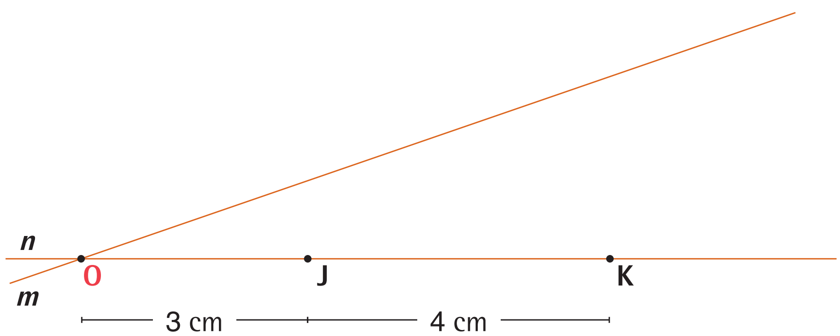
____

c) ¿El segmento **AA'** es paralelo al segmento **EE'**? _________ . Justifica tu respuesta.

____

____

II. Considera dos rectas que se intersecan, ***m*** y ***n***, y los segmentos marcados en ***n***, $\overline{OJ}$ y $\overline{JK}$.



a) Sobre la recta ***m***, marca dos puntos (**G** y **H**), los que quieras, pero de modo que cumplan la siguiente condición:

$$\frac{\overline{OJ}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{JK}}{\overline{GH}}$$

b) ¿Cuánto miden los segmentos **OG** y **GH** que obtuviste?

$\overline{OG}$ = _________ $\overline{GH}$ = _________

c) ¿Son paralelos los segmentos $\overline{\mathbf{GJ}}$ y $\overline{\mathbf{HK}}$? _________ Justifica tu respuesta. _____

____

____

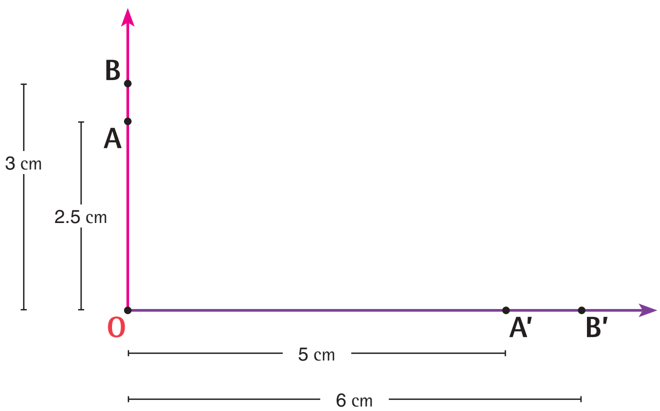
Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

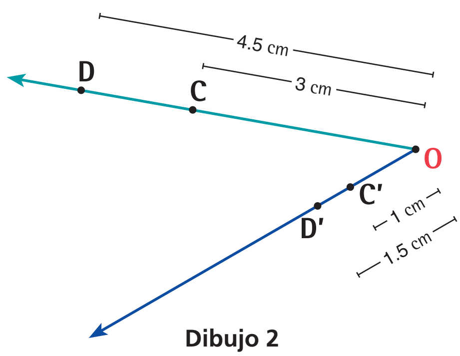
Sean *l* y *m* dos rectas que se intersecan en O. Si en cada una de las rectas se eligen tres o más puntos de manera que las medidas de los segmentos determinados en una sean proporcionales a las correspondientes medidas de los segmentos determinados en la otra, se cumple que las rectas determinadas por puntos correspondientes son paralelas entre sí. A este enunciado se le conoce como el inverso del teorema de Tales.

>>> Lo que aprendimos

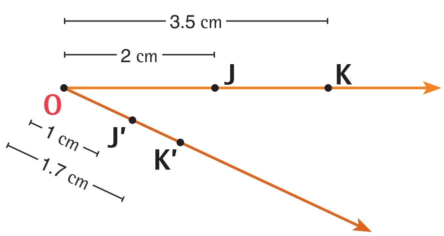
En cada una de las siguientes figuras traza los segmentos determinados por los puntos denotados con la misma letra, por ejemplo, el segmento **AA'**.



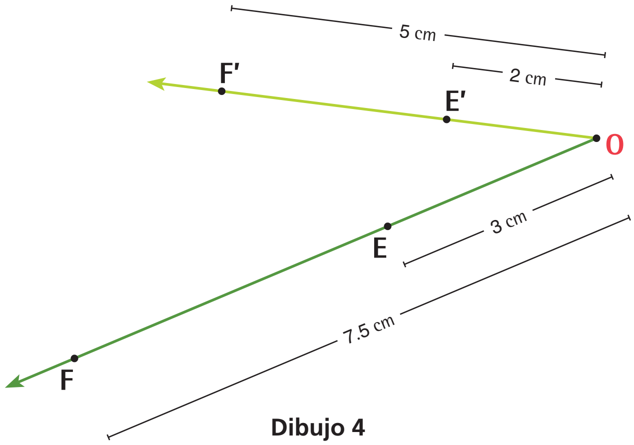
Dibujo 1



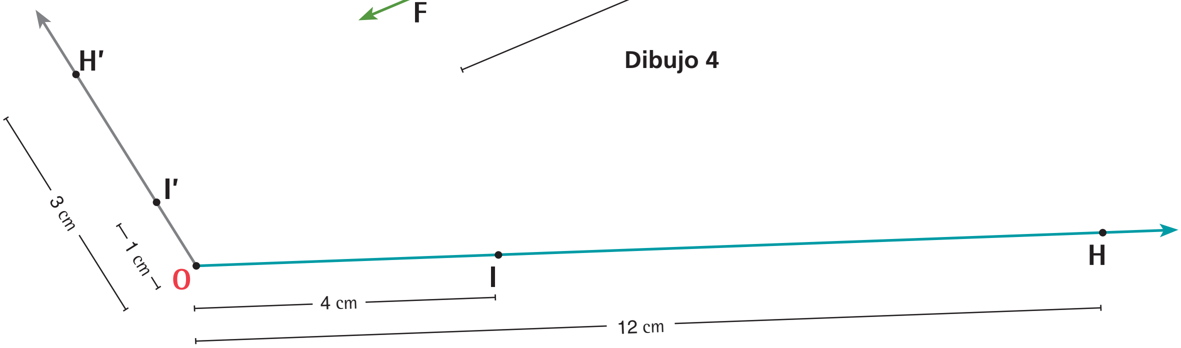
Dibujo 2



Dibujo 3



Dibujo 4



Dibujo 5

En una de las figuras los segmentos que trazaste al unir los puntos no son paralelos, ¿cuál de las figuras es? ____________ . Justifica tu respuesta. ____________________

____

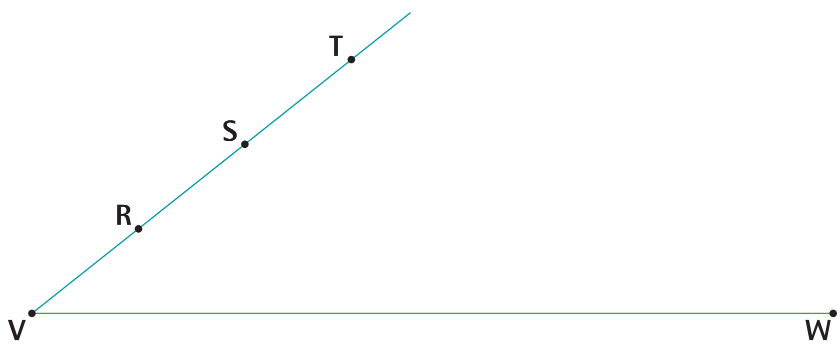
____

AHÍ ESTÁ EL TEOREMA DE TALES

SESIÓN 3

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente figura $\overline{VR} = \overline{RS} = \overline{ST}$. Traza el segmento $\overline{TW}$ y paralelas a este segmento que pasen por **S** y **R**. Sean **S'** y **R'** los puntos en los que las paralelas cortan al segmento **VW**, respectivamente.



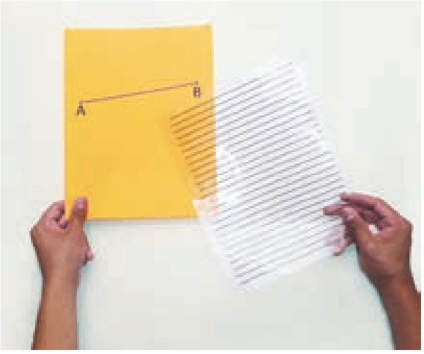
a) ¿En cuántos segmentos quedó dividido el segmento **VW**? ________________

b) ¿Cómo son entre sí los segmentos en los que se dividió el segmento **VW**? ____________

Justifica tu respuesta. ____

____

2. En las ilustraciones se muestra el procedimiento para dividir en 5 partes iguales un segmento dado utilizando una hoja rayada.



Comenta con tus compañeros y escribe una justificación de que los segmentos en los que quedó dividido el segmento dado miden los mismo. ______________

____

____

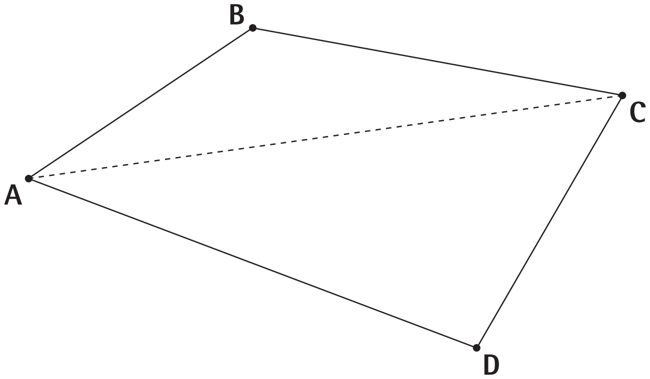
____

____

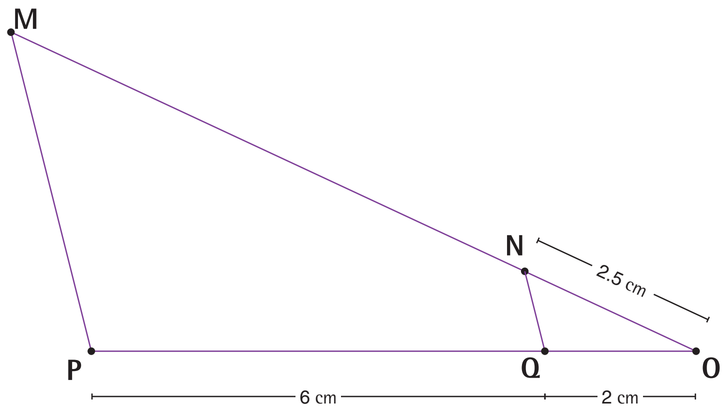
3. Utiliza el teorema de Tales para justificar que los puntos medios de los lados de cualquier triángulo determinan un triángulo semejante al dado.

¿Cuál es la razón de semejanza del triángulo dado con respecto al triángulo formado por los puntos medios?

4. Utiliza el teorema de Tales para justificar la siguiente afirmación: los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero determinan un paralelogramo.



5. Calcula la longitud del segmento $\overline{MN}$. Considera paralelos los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$.



Para conocer más acerca de las aplicaciones de este teorema en la solución de problemas, puedes ver el programa *Utilizando el teorema de Tales*.

>>> Para saber más

Sobre el teorema de Tales y sus aplicaciones, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Semejanza_aplicaciones/teorema_de_thales.htm
Ruta: Aplicaciones
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Sobre Tales, consulta:
http://www.filosofia.org/cur/pre/tales.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Filosofía en español. España.

Figuras homotéticas

En esta secuencia aprenderás a identificar y construir polígonos homotéticos. Determinarás el centro y la razón de homotecia de polígonos homotéticos.

SESIÓN 1

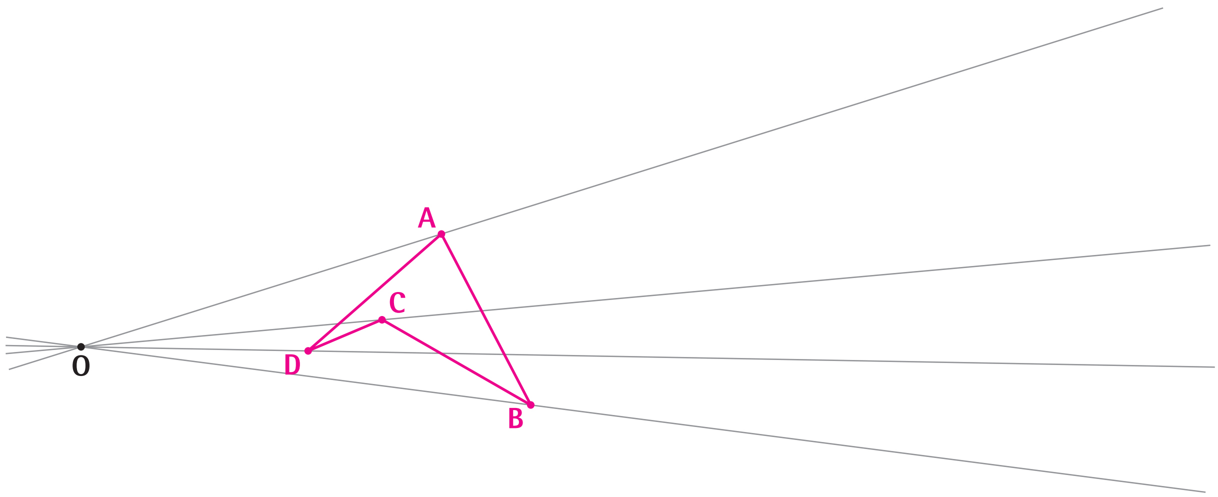
ESPECIALMENTE SEMEJANTES

>>> Para empezar

Describan las dos características que cumplen los polígonos semejantes.

>>> Consideremos lo siguiente

Sean **O** un punto del plano y **ABCD** un cuadrilátero. Construyan un cuadrilátero **A'B'C'D'** semejante al dado de manera que **A'** esté en la recta **OA**, **B'** en la recta **OB**, **C'** en la recta **OC** y **D'** en la recta **OD** y que la razón de semejanza de **ABCD** con respecto al **A'B'C'D'** sea 3.



a) Describan el procedimiento que utilizaron.

b) Justifiquen por qué el polígono que trazaron (es decir, el cuadrilátero **A'B'C'D'**) es semejante al **ABCD** en la razón de semejanza pedida. ____________________

____

____

c) ¿Son paralelos entre sí los pares de lados correspondientes? ____________

Justifiquen su respuesta. ________________________________

____

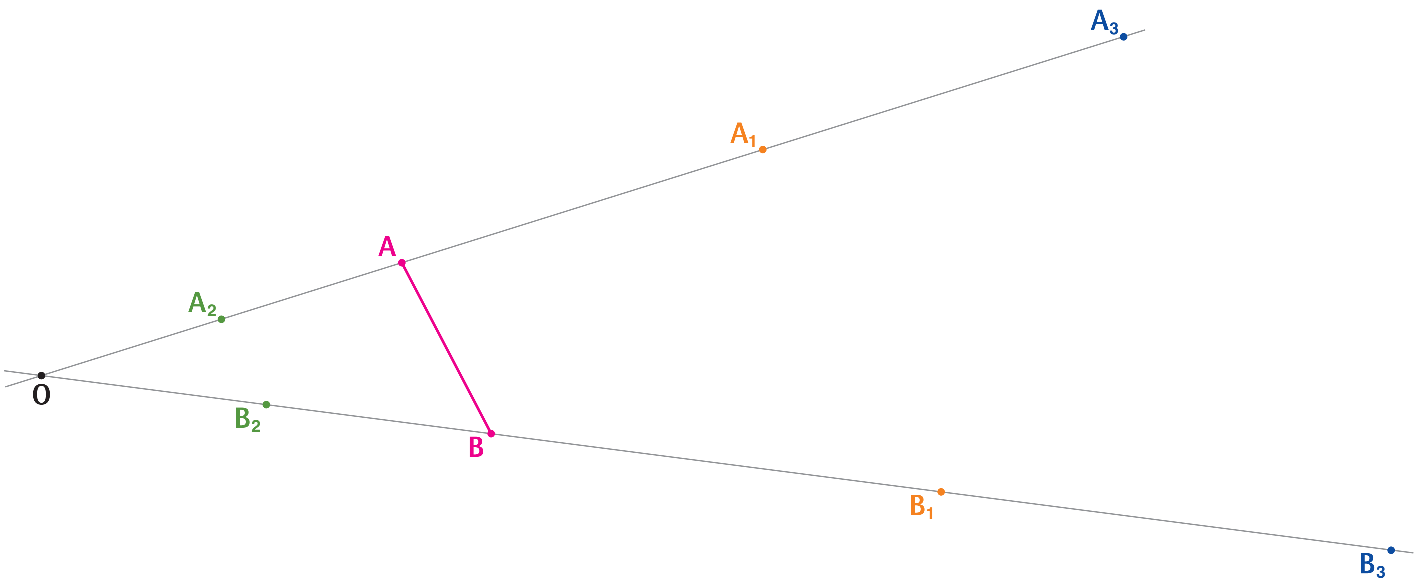
____

____

Comparen sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. En la siguiente figura se trazó el lado **AB** del cuadrilátero anterior. Sobre la recta **OA** están señalados los puntos A_1, A_2 y A_3, tales que, $\overline{OA_1}$ = 10 cm, $\overline{OA_2}$ = 2.5 cm y $\overline{OA_3}$ = 15 cm. Sobre la recta **OB** están señalados los puntos B_1, B_2 y B_3, tales que, $\overline{OB_1}$ = 12 cm, $\overline{OB_2}$ = 3 cm y $\overline{OB_3}$ = 18 cm. Traza los segmentos A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3.



a) ¿Son paralelos los segmentos **AB** y A_1B_1? ____________

Justifica tu respuesta. ________________________________

____

____

b) ¿Son paralelos los segmentos **AB** y $\mathbf{A_2B_2}$? ___________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

c) ¿Son paralelos los segmentos **AB** y $\mathbf{A_3B_3}$? ___________

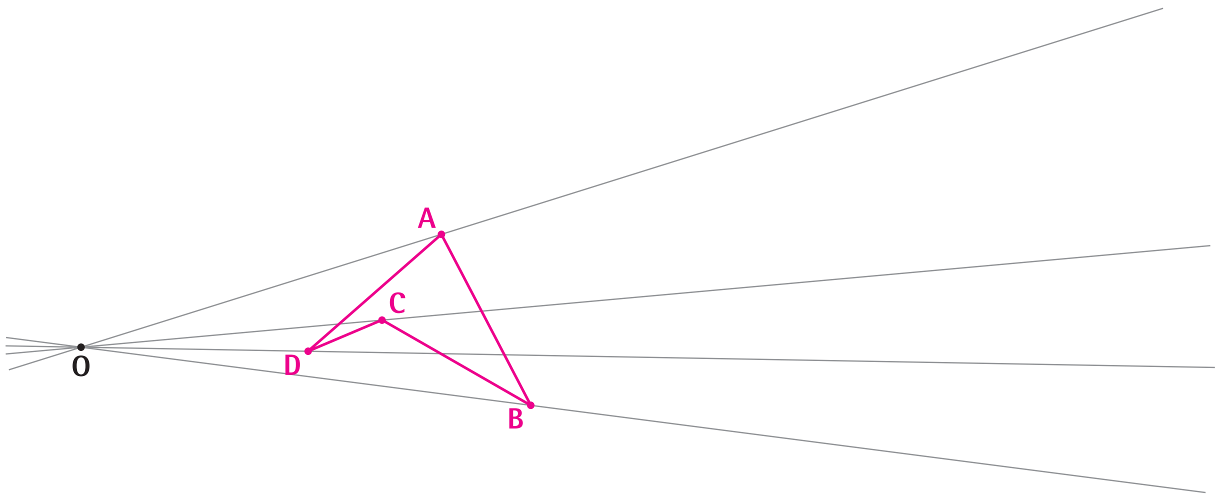
Justifica tu respuesta. ____

____

____

d) ¿Cuál de los tres segmentos que trazaste está en razón **3** a **1** con respecto al segmento **AB**? ___________

II. Utiliza tu compás para trazar puntos **A'**, **B'**, **C'** y **D'** de manera que $\mathbf{OA'} = 2\,\overline{\mathbf{OA}}$, $\overline{\mathbf{OB'}} = 2\,\overline{\mathbf{OB}}$, $\overline{\mathbf{OC'}} = 2\,\overline{\mathbf{OC}}$ y $\overline{\mathbf{OD'}} = 2\,\overline{\mathbf{OD}}$.



a) ¿Son semejantes los cuadriláteros? ___________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

b) ¿Los lados del cuadrilátero **ABCD** son paralelos a los correspondientes lados del cuadrilátero **A'B'C'D'**? ___________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

Dados un polígono (ABCDEF…), un punto O del plano y las rectas que unen cada vértice del polígono con el punto O, si se trazan puntos A', B', C', D', E', F', … en las rectas OA, OB, OC, OD, OE, OF, …, respectivamente, de manera que las medidas de los segmentos $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, $\overline{OD'}$, $\overline{OE'}$, $\overline{OF'}$, … sean proporcionales a las medidas de los segmentos OA, OB, OC, OD, OE, OF, …, se cumple que el polígono A'B'C'D'E'F' … es semejante al polígono original y que sus lados son paralelos a los lados correspondientes del polígono original.

III. a) Realicen los trazos que se piden:

1. Tracen en su cuaderno un triángulo **ABC**.
2. Tracen una recta paralela al lado **BC** y con su compás marquen en esa paralela un segmento que mida $\frac{1}{4}$ de **BC**. Llamen a los extremos del segmento **B'** y **C'**.
3. Tracen una paralela a **BA** que pase por **B'** y con su compás marquen desde **B** un segmento que mida $\frac{1}{4}$ de **BA**, y llamen al otro extremo **A'**. Asegúrense de que el ángulo **A'B'C'** mida lo mismo que el ángulo **ABC**.
4. Tracen el segmento **A'C'**.
5. Tracen las rectas **AA'**, **BB'** y **CC'**.

b) Contesten.

1. ¿Son semejantes los triángulos **ABC** y **A'B'C'**? ____________
2. Si los triángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de **ABC** con respecto a **A'B'C'**? ________________
3. Observen que las rectas **AA'**, **BB'** y **CC'** se intersecan en un solo punto, llámenlo **O**. ¿Cuánto valen las razones $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$ y $\frac{OC}{OC'}$? ________________

c) Comenten qué relación hay entre la razón de semejanza de los triángulos y la razón de las distancias de **O** a los vértices correspondientes.

Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen sus resultados.

>>> A lo que llegamos

Especialmente semejantes

Para trazar un triángulo semejante a un triángulo dado, se pueden trazar rectas paralelas a los lados del triángulo.

Los polígonos semejantes con lados correspondientes paralelos se llaman polígonos homotéticos.

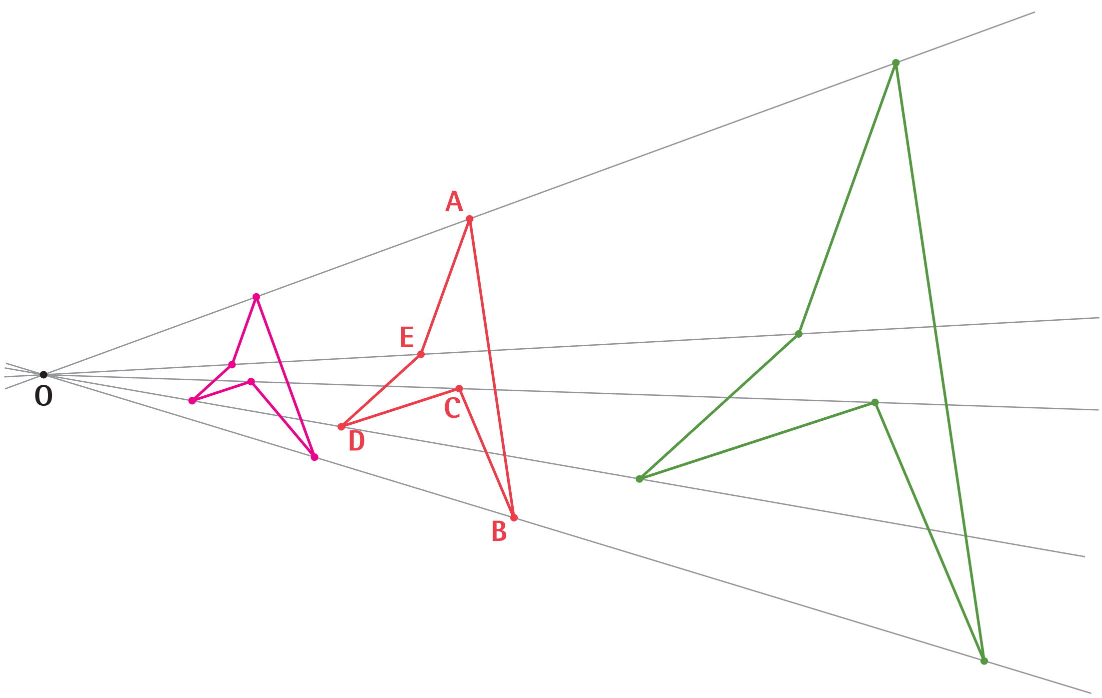
El punto en el que se intersecan las rectas determinadas por los vértices correspondientes de polígonos homotéticos se llama centro de homotecia.

SESIÓN 2

DEPENDE DE LA RAZÓN

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente esquema se trazaron dos pentágonos homotéticos al pentágono **ABCDE**, con **O** como centro de homotecia. Determinen las razones de semejanza que permiten obtener cada uno de los pentágonos trazados a partir del pentágono **ABCDE**.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza del pentágono verde respecto del pentágono **ABCDE**?

____

b) ¿Cuál es la razón de semejanza del pentágono rosa respecto del pentágono **ABCDE**?

____

c) Si se traza un pentágono homotético a **ABCDE**, con centro de homotecia **O** y con razón de semejanza $\frac{1}{3}$ respecto a **ABCDE**, ¿las medidas de los lados del pentágono homotético resultante serán mayores, menores o iguales a las del pentágono **ABCDE**?

____

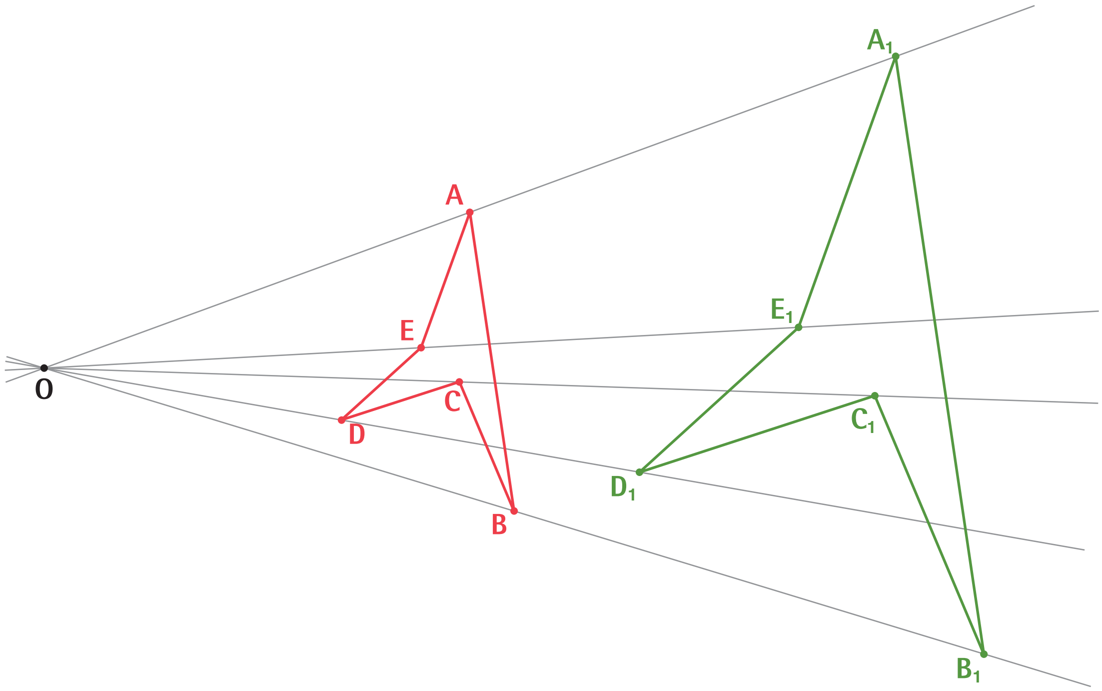
d) Si se traza un pentágono homotético a **ABCDE**, con centro de homotecia **O** y con razón de semejanza $\frac{3}{2}$ respecto a **ABCDE**, ¿las medidas de los lados del pentágono homotético resultante serán mayores, menores o iguales a las del pentágono **ABCDE**?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En el esquema siguiente se trazaron dos pentágonos homotéticos, con **O** como centro de homotecia. Mide lo que se pide y contesta.



a) ¿Cuánto mide el segmento **OA**? ______________

b) ¿Cuánto mide el segmento $\mathbf{OA_1}$? ______________

c) ¿Por qué número se tiene que multiplicar **OA** para obtener $\mathbf{OA_1}$? ______________

d) ¿Cuánto vale la razón $\frac{OA_1}{OA}$? ______________

e) ¿Es posible determinar las razones $\frac{OB_1}{OB}$, $\frac{OC_1}{OC}$, $\frac{OD_1}{OD}$, $\frac{OE_1}{OE}$ sin medir los segmentos? ___________ ¿por qué? ____

____

f) ¿Cuál es la razón de semejanza que permite obtener el pentágono $A_1B_1C_1D_1E_1$ a partir del pentágono **ABCDE**? ___________________

II. Marca el punto medio de los segmentos **OA**, **OB**, **OC**, **OD** y **OE**. Llama a los puntos medios **A'**, **B'**, **C'**, **D'** y **E'**, respectivamente.

a) ¿El pentágono **A'B'C'D'E'** es homotético con respecto al pentágono **ABCDE**? ___________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

b) Si los pentágonos son homotéticos, ¿cuál es la razón de semejanza de **A'B'C'D'E'** respecto a **ABCDE**? ___________________

Comparen sus respuestas.

Dado un polígono **P**, un centro de homotecia y una razón de semejanza respecto a **P**, contesten:

a) ¿Para qué valores de la razón de semejanza las medidas de los lados del polígono homotético serán *menores* que las medidas de los lados del polígono **P**?

b) ¿Para qué valores de la razón de semejanza las medidas de los lados del homotético serán *mayores* que las medidas de los lados de **P**?

>>> A lo que llegamos

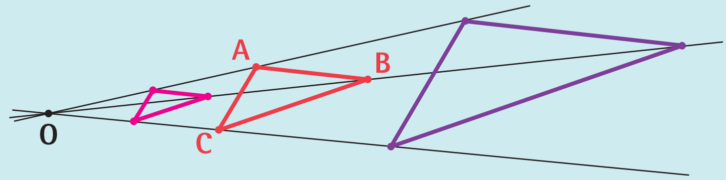
Dados dos polígonos homotéticos, a la razón de semejanza que permite obtener uno de los polígonos a partir del otro polígono se le llama razón de homotecia.

Dados un polígono P y una razón de homotecia respecto a P (denotada con *r*), se cumple lo siguiente.

1. Si r es mayor que 0 pero menor que 1, las medidas de los lados del polígono homotético resultante son menores que las medidas de los lados del polígono P.

2. Si r es mayor que 1, las medidas de los lados del polígono homotético resultante son menores que las medidas de los lados del polígono P.

Por ejemplo, dado el triángulo ABC y una razón de homotecia *r* respecto a él, se puede obtener triángulos homotéticos de lados mayores o menores, dependiendo del valor de la razón de homotecia.



$0 < r < 1$ $\quad$ $r > 1$

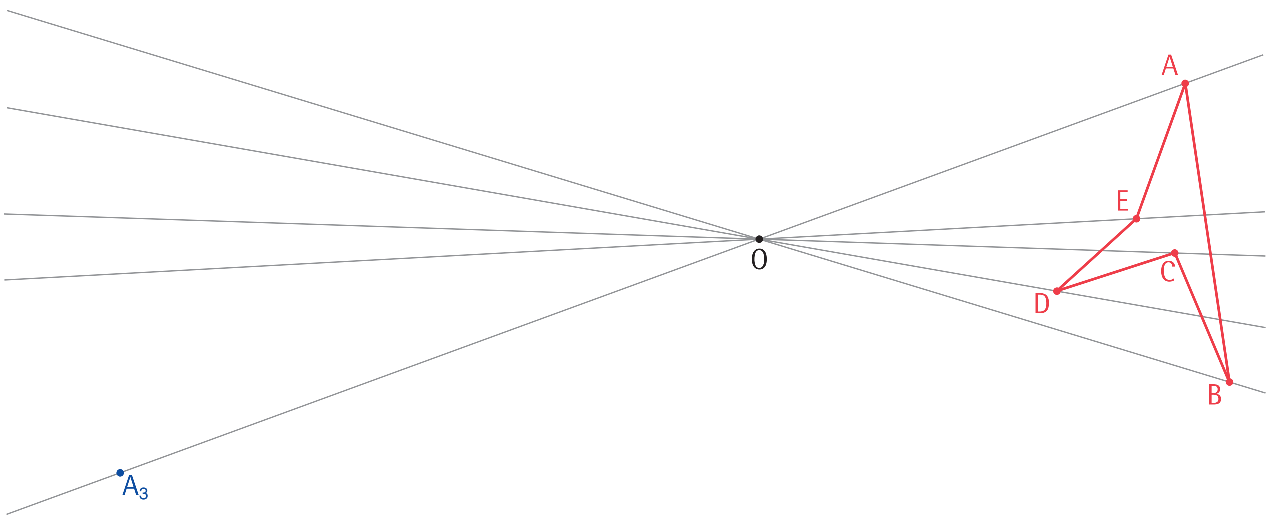
En la figura, para obtener el triángulo morado, se utilizó una razón mayor que 1 y para obtener el rosa se utilizó una razón menor que 1, y mayor que cero.

a) Comenten: ¿cómo son entre sí los polígonos si la razón de homotecia es igual a 1?

b) Regresen al apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen sus resultados.

III. En la actividad anterior estudiaste el efecto que producen las razones de homotecia positivas. También hay razones de homotecia que son *negativas*.

Por ejemplo, al aplicar una razón de homotecia negativa al pentágono **ABCDE**, el vértice correspondiente al vértice **A** es $\mathbf{A_3}$.



a) ¿Cuánto mide **OA**? ____________________ ¿Por qué número tienes que multiplicar a **OA** para obtener $\mathbf{OA_3}$? ____________________

b) Sobre el esquema anterior, localiza los puntos $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{C_3}$, $\mathbf{D_3}$ y $\mathbf{E_3}$ correspondientes a los vértices **B**, **C**, **D** y **E**. Une los puntos para obtener el polígono $\mathbf{A_3B_3C_3D_3E_3}$.

c) ¿Cuál es el número por el que se multiplican las distancias **OA**, **OB**, **OC**, **OD** y **OE** para obtener las distancias $\mathbf{OA_3}$, $\mathbf{OB_3}$, $\mathbf{OC_3}$, $\mathbf{OD_3}$ y $\mathbf{OE_3}$? ____________________

d) Justifica por qué el pentágono $A_3B_3C_3D_3E_3$ es homotético al pentágono **ABCDE**.

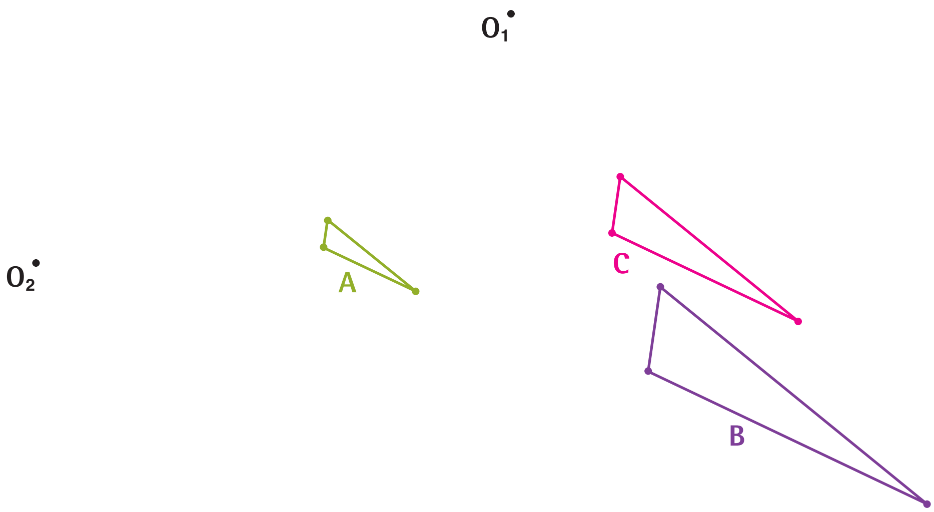
Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuál es la diferencia entre el pentágono $A_1B_1C_1D_1E_1$ de la actividad **I** y el pentágono $A_3B_3C_3D_3E_3$?

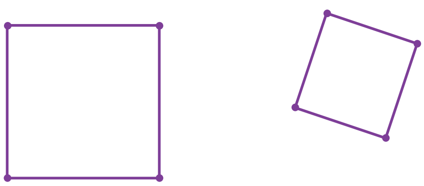
b) Describan el efecto de aplicar a un polígono una homotecia con razón de homotecia negativa.

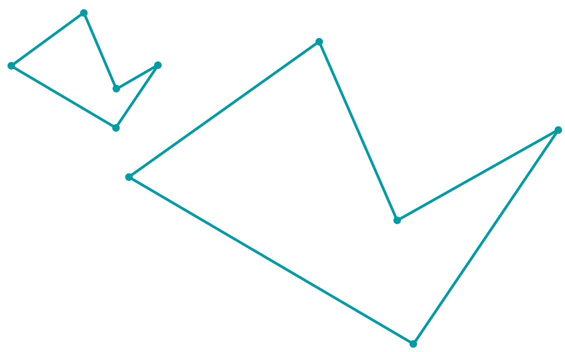
>>> Lo que aprendimos

1. Los triángulos **A** y **B** son homotéticos al triángulo **C**, ¿cuál de los dos puntos, O_1, O_2, es centro de homotecia y para qué pareja de triángulos? ____________



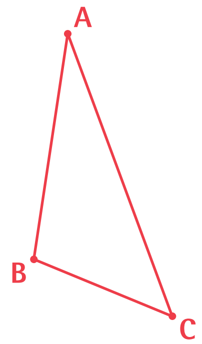
2. Señala en cuál de las figuras los polígonos son homotéticos.





☐ **Figura 1**   ☐ **Figura 2**

3. Traza un segmento de recta en el triángulo **ABC** de manera que se forme un triángulo semejante a éste.



Comenta:

a) ¿Cómo trazaste el segmento?

b) ¿Cómo justificarías que los triángulos son semejantes?

c) ¿Cuáles son los pares de lados correspondientes?

Para conocer más acerca de las aplicaciones de las propiedades de la homotecia en la solución de problemas, puedes ver el programa de televisión *Problemas de homotecia*.

>>> Para saber más

Sobre homotecia, consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Peña, José Antonio de la. *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/homoteciaysemejanzas/homoteciaysemejanzas.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

SECUENCIA 18

Gráficas de relaciones funcionales

Hasta este momento has estudiado gráficas que son líneas rectas; sin embargo, no todos las gráficas son así. En esta secuencia graficarás relaciones funcionales cuyas gráficas ¡no son líneas rectas!

SESIÓN 1

PLANO INCLINADO

>>> Para empezar

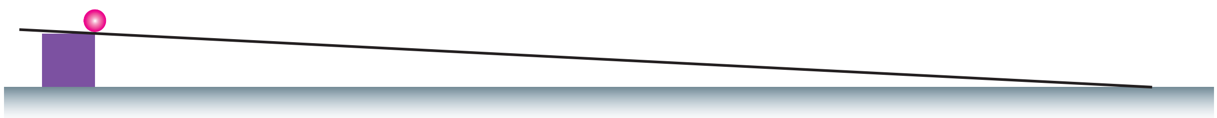
Conexión con Ciencias II

Secuencia 4: ¿Cómo caen los cuerpos?

En la secuencia 4 **¿Cómo caen los cuerpos?** de tu libro de **Ciencias II**, volumen I, estudiaste la caída de una canica a lo largo de un plano inclinado. El movimiento de la canica resulta ser *uniformemente acelerado*, es decir, mantiene una aceleración constante. Ahora, trataremos de describir la posición de la canica en cualquier momento del tiempo.

>>> Consideremos lo siguiente

En la figura, se muestra una canica que está a punto de caer por una rampa de 400 cm de largo.

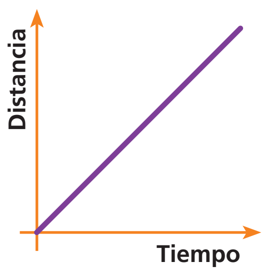


Usando fotografías, se mide la distancia que la canica ha recorrido en cada segundo transcurrido desde que se soltó. En la tabla 1 se indica el resultado de esta medición.

Tiempo	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s	5 s
Distancia	0 cm	10 cm	40 cm	90 cm	160 cm	250 cm

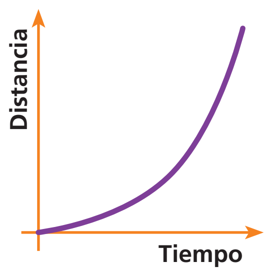
Tabla 1

¿Cuál de las siguientes gráficas crees que representa mejor la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por la canica? __________ .

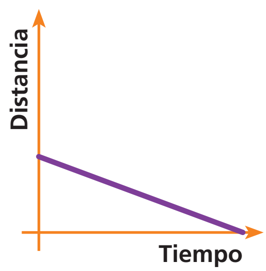


a)

b)



c)



d)

Comparen sus respuestas y comenten.

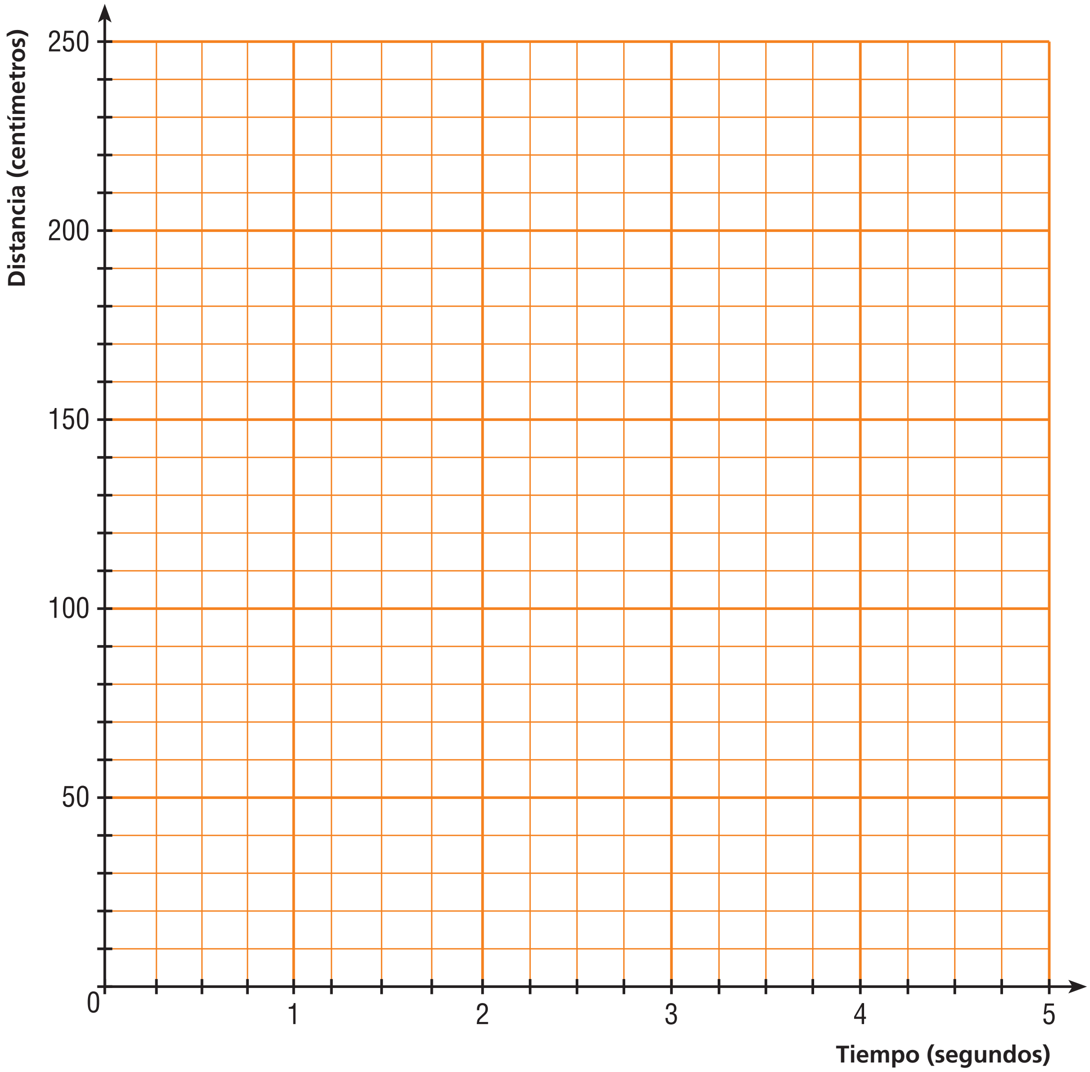
¿Cuáles de las cuatro gráficas representan relaciones lineales?

¿Cuál de las cuatro representa una relación lineal por pedazos?

Recuerden que:
Una relación es lineal si su gráfica es una línea recta. Y es lineal por pedazos si su gráfica es unión de segmentos de recta.

>>> Manos a la obra

I. En el siguiente plano cartesiano localiza los puntos asociados a la tabla 1. Después dibuja la gráfica de la relación como creas que debería de verse (ayúdate de la gráfica que elegiste en el apartado *Consideremos lo siguiente*). Recuerda que la gráfica debe pasar por los puntos que ya localizaste.



II. Observa la gráfica y contesta:

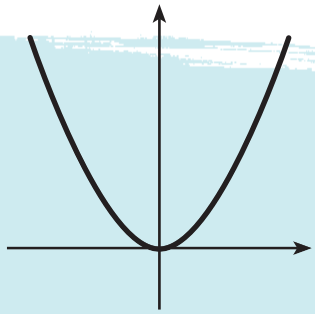
a) Aproximadamente, ¿qué distancia lleva recorrida la canica cuando han transcurrido 2.5 segundos? ____________

b) ¿Y cuando han transcurrido 3.5 segundos? ____________

Comparen respuestas. Después lean la información del apartado *A lo que llegamos* y, por último, comenten: de acuerdo con lo dicho en el texto, la relación entre tiempo y distancia de un cuerpo en aceleración constante, ¿es cuadrática? Justifiquen su respuesta.

>>> A lo que llegamos

La gráfica asociada a la relación entre tiempo y distancia de un cuerpo con aceleración constante (por ejemplo, la caída de una canica en un plano inclinado) es una curva conocida como **parábola**. En la siguiente gráfica se ha dibujado una parábola. La gráfica que corresponde al ejemplo de la canica es la parte derecha de una parábola.



Por otro lado, cuando la gráfica es una parábola, la relación es cuadrática. Es decir, es una relación como $y = 3x^2 + 5x - 8$, $y = 3x^2 + 5x$, $y = 3x^2 - 8$, $y = 3x^2$, etc., donde la x aparece elevada al cuadrado y donde aparecen además algunos términos de grado uno y otros de grado cero.

Para conocer más sobre las gráficas de relaciones cuadráticas, pueden ver el programa *Gráficas y movimiento acelerado*.

III. Denotamos con la letra x el tiempo que ha transcurrido desde que se dejó caer la canica y con la letra y la distancia recorrida. De las siguientes expresiones, ¿cuál crees que sirve para calcular y a partir de x? Márcala.

a) $y = 10x$ b) $y = 11x^2 - x$ c) $y = 10x^2$ d) $y = 30x - 20$

Usando la expresión que elegiste, calcula los valores de y para los valores de x dados.

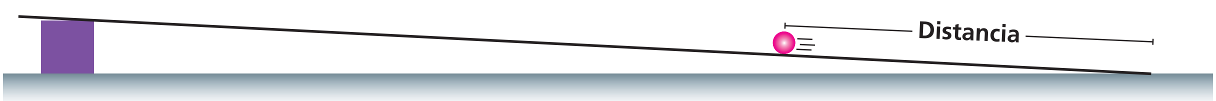
Si $x = 2$, entonces $y =$ ____________ Si $x = 2.5$, entonces $y =$ ____________

Si $x = 3$, entonces $y =$ ____________ Si $x = 3.5$, entonces $y =$ ____________

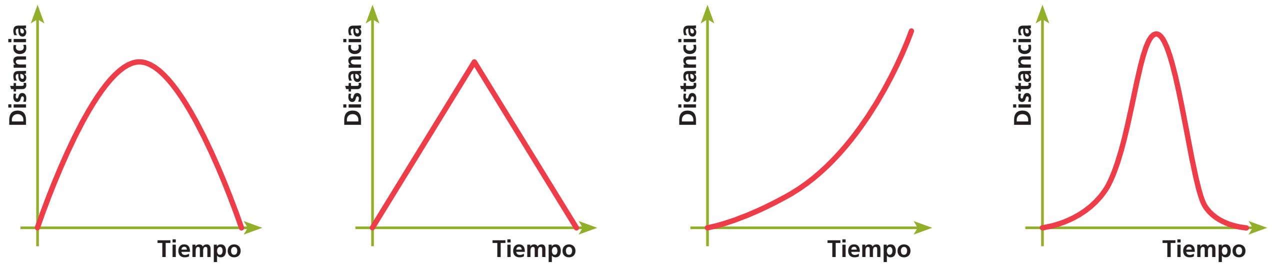
Comparen sus repuestas y comenten. ¿Estos valores coinciden con los que aproximaron en la actividad anterior? ¿Qué tan buena fue la aproximación?

>>> Lo que aprendimos

Al tirar una canica desde abajo de un plano inclinado, ésta no logra subir hasta el final del plano y baja de regreso.



En cada segundo, se midió la distancia a la que se encontraba la canica del lugar de lanzamiento y con los datos se obtuvo una de las siguientes gráficas. Señálenla.



a) b) c) d)

Comparen sus respuestas y comenten:

a) Cuando la canica alcanzó el punto más alto, ¿cuál creen que era su velocidad?

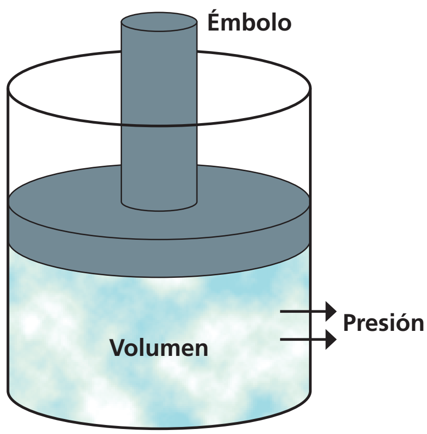
b) ¿En qué momento la canica va acelerando?, ¿En qué momento va frenando? ¿Cuándo lleva velocidad constante?

LA LEY DE BOYLE

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Un gas encerrado dentro de un recipiente ejerce una fuerza sobre las paredes. A la fuerza ejercida por el gas en cada m² de superficie se le llama *presión*. La presión se expresa normalmente en pascales (Pa).



La ley de Boyle afirma que (a temperatura fija) la presión ejercida por un gas es inversamente proporcional al volumen del gas.

Por ejemplo, en la figura 1, cuando se disminuye el volumen del gas a la **mitad** (empujando el émbolo) la presión que ejerce el gas sobre las paredes se **duplica**. Por ello se dice que, en estas condiciones, el volumen y la presión son cantidades inversamentente proporcionales.

Recuerda que:
Una relación es de proporcionalidad inversa si al aumentar al doble, al triple, etc. una de las cantidades, la otra disminuye a la mitad, a la tercera parte, etcétera.

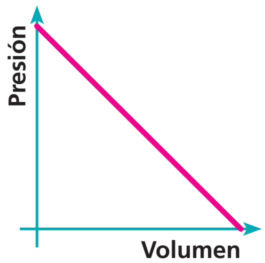
>>> Consideremos lo siguiente

Un gas ejerce una presión de 100 Pa en un recipiente que tiene un volumen de 200 m^3.

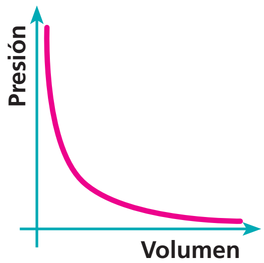
a) Al jalar el émbolo, se puede aumentar el volumen del gas a 400 m^3. Según la ley de Boyle, ¿cuánto deberá valer la presión ahora? ______________________ Pa.

b) Y si se redujera el volumen a 100 m^3, ¿cuánto valdría la presión? __________ Pa.

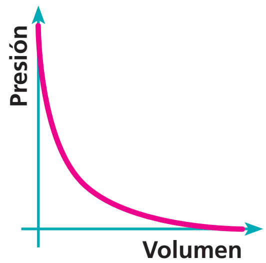
c) ¿Cuál de las siguientes gráficas creen que describe mejor la relación entre el volumen y la presión? Márquenla.



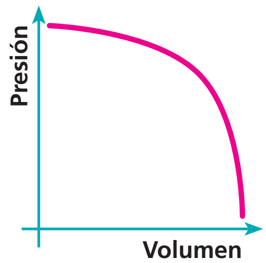
a)



b)



c)



d)

Comparen sus respuestas y comenten.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla .

Volumen (m^3)	50	100	200	300	400	500
Presión (Pa)			100			
Volumen × Presión (m^3 × Pa)			20 000			

Denoten con la letra x el volumen que ocupa el gas (medido en m^3) y con la letra y la presión (medida en Pa) ejercida por el gas. Ahora realicen lo siguiente.

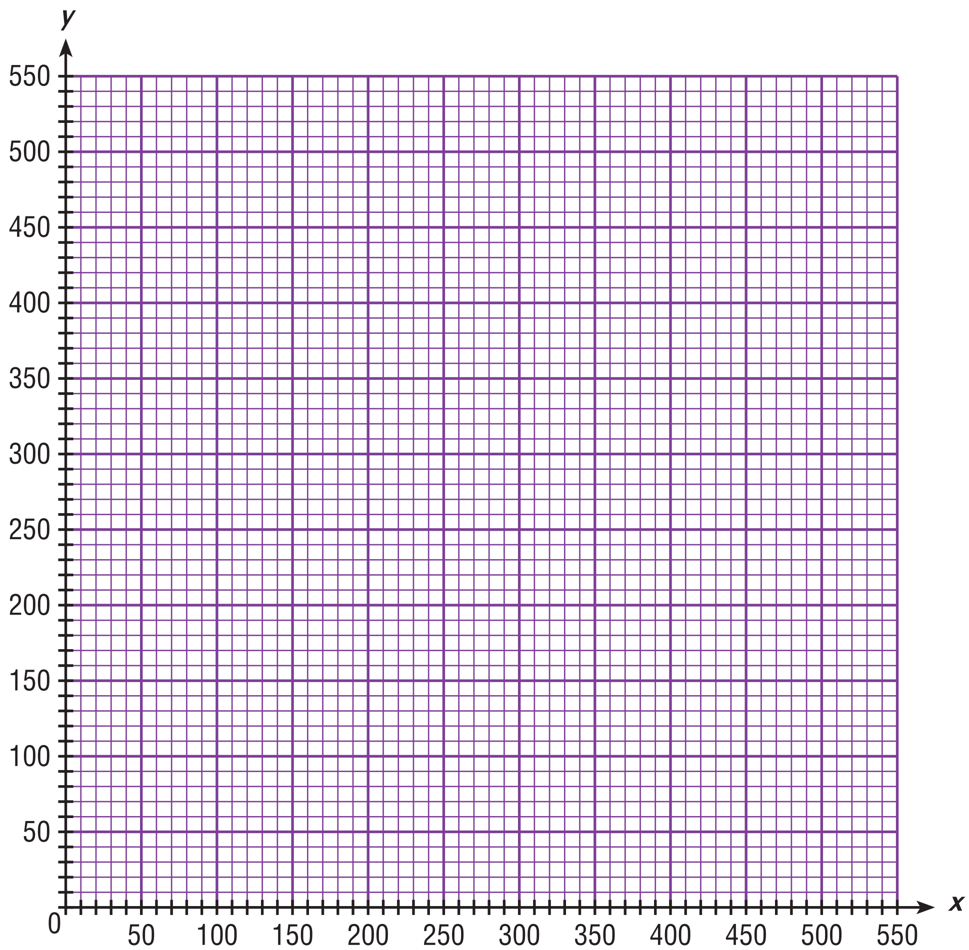
a) Completen la expresión para el producto del volumen y la presión.

$xy =$ __________

b) Usen la expresión anterior para escribir otra que sirva para calcular y a partir de x.

$y =$ ____________________

II. Localicen los datos de la tabla 1 en el siguiente plano cartesiano y hagan un bosquejo de la gráfica de la relación entre la ***x*** y la ***y***.



III. Observen la gráfica y la expresión que permite calcular ***y*** a partir de ***x***.

¿Existe algún valor de ***x*** para el cual ***y*** valga cero? __________ Si creen que existe escríbanlo, si creen que no existe expliquen por qué. ______________________________

____

____

____

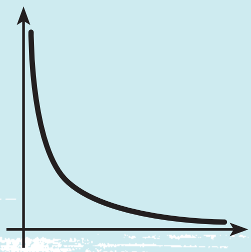
Comparen sus gráficas con la que eligieron en el apartado *Consideremos lo siguiente*.

a) Si el volumen es muy grande, ¿qué pasa con la presión? ¿Cómo se ve esto en la gráfica?

b) Cuando se reduce mucho el volumen del gas en el recipiente hasta casi ser cero, ¿qué pasa con la presión? ¿Cómo se ve esto en la gráfica?

>>> A lo que llegamos

La expresión asociada a una relación de proporcionalidad inversa es de la forma $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de proporcionalidad inversa. La gráfica asociada a estas relaciones es una curva conocida como **hipérbola**. Esta hipérbola tiene la propiedad de no intersecar a ninguno de los ejes, como se muestra en la figura.



Para conocer más ejemplos de relaciones de proporcionalidad inversa y sus gráficas, pueden ver el programa *Gráficas y Ley de Boyle*.

>>> Lo que aprendimos

Un tanque de 10 decímetros cúbicos (10 dm^3) tiene helio (un gas bastante común) encerrado a una presión de 1 014 hectopascales (1 014 HPa). La misma cantidad de gas se desea colocar en tanques de otro volumen. Usen la ley de Boyle para contestar lo siguiente:

a) Calculen cuál será la presión a la que estará encerrado el helio si se colocara en un tanque de cada uno de los volúmenes en la tabla.

Volúmen del Tanque (dm^3)	5	10	15	20	25
Presión que ejerce el helio sobre las paredes del tanque (HPa)		1 014			

b) Escriban una expresión que relacione el volumen y del tanque (en dm^3) con la presión x en la que se encuentra encerrado el helio (en HPa).

$y =$ ____________________

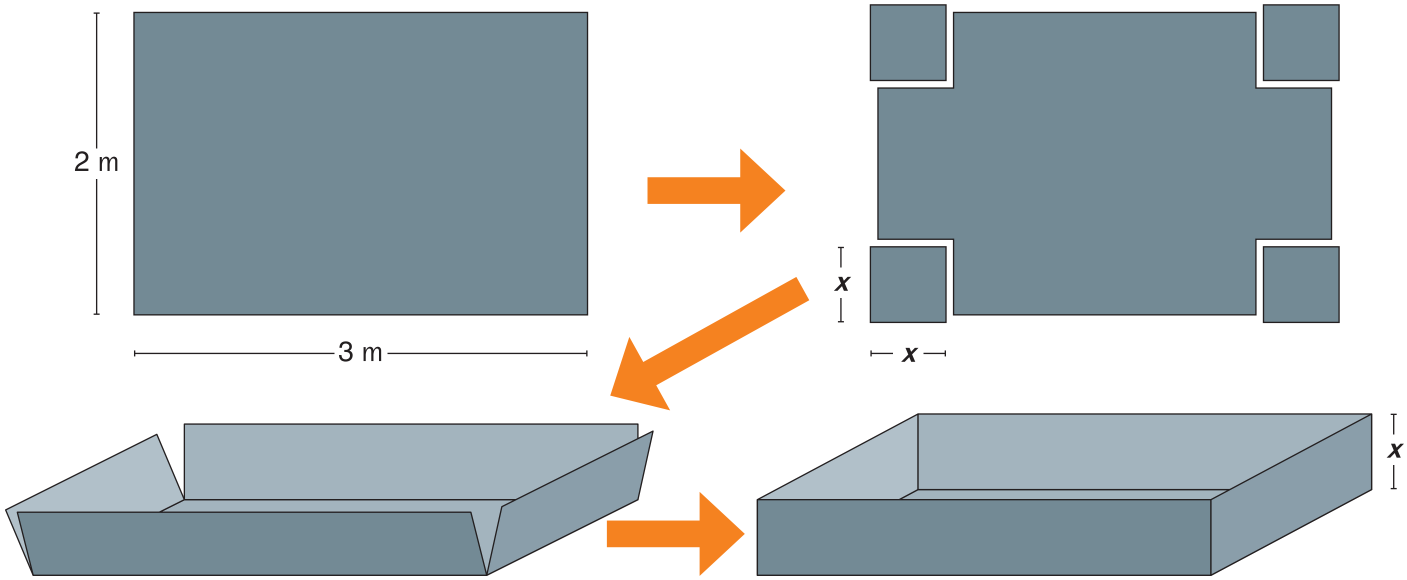
c) En su cuaderno hagan la gráfica de esta relación.

d) Si se deseara guardar esa cantidad de helio a una presión de 1 010 HPa, ¿qué volumen tendría que tener el tanque? ______________________________

LA CAJA

>>> Para empezar

En una empresa fabrican cajas de metal. Las cajas se construyen a partir de una lámina rectangular de 3 m de largo por 2 m de ancho, a la que le cortan cuatro cuadrados de las esquinas. Después, se dobla la lámina restante para formar una caja rectangular y, por último, se sueldan las orillas.

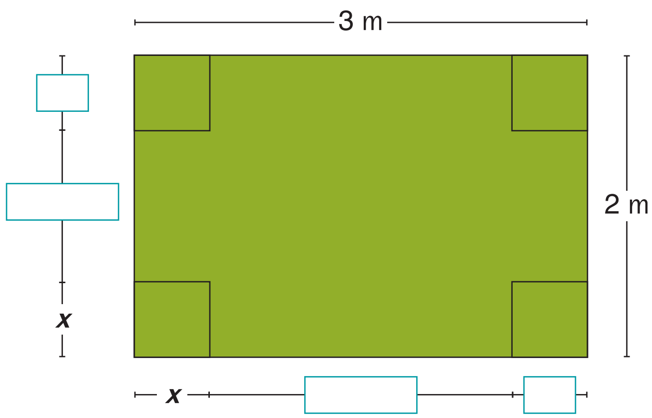


Los fabricantes no saben de qué tamaño cortar los cuadrados para que el volumen sea lo más grande posible. Por ello en la figura se ha marcado con la letra x la medida en metros de los lados de los cuadrados que se cortan.

En esta sesión encontraremos el valor de x para *maximizar el volumen* de la caja, es decir, para que su volumen sea lo más grande posible.

>>> Manos a la obra

I. Anoten en los recuadros de la siguiente figura las expresiones algebraicas que representan las medidas faltantes.



a) Una vez cortados los cuadrados y armada la caja, la altura de la caja será x. ¿Cuáles serán las expresiones que representen a las otras dos medidas de la caja?

Ancho = ____________________

Largo = ____________________

b) Denoten con la letra y el volumen de la caja (en metros cúbicos). Escriban una expresión que sirva para obtener y a partir de x.

y = ____________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus expresiones algebraicas.

II. Con la expresión que obtuvieron llenen la siguiente tabla.

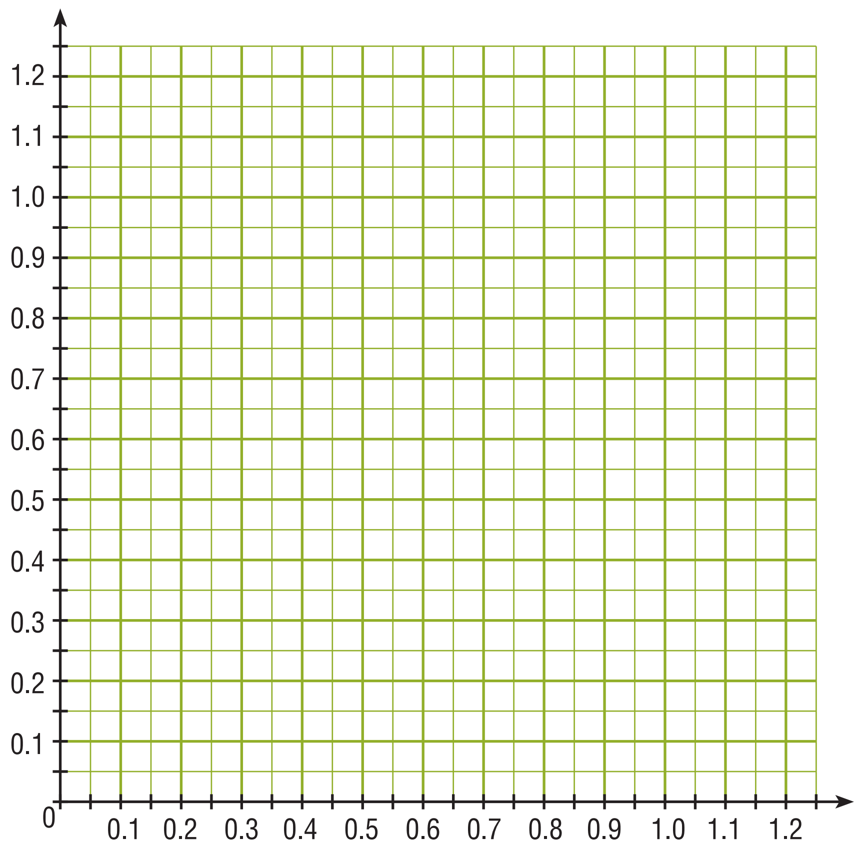
x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
y					

a) Según la expresión que obtuvieron, ¿cuánto vale ***y*** si ***x*** vale 0? ____________

b) Si ***x*** vale 1, ¿cuánto vale ***y***? ____________

c) ¿Qué significado tiene esto en el problema? ____________

III. Localicen los datos de la tabla anterior en el siguiente plano cartesiano. Incluyan los valores cuando ***x*** es igual que 0 y cuando es igual que 1.



a) Unan los puntos con una curva para completar un bosquejo de la gráfica.

b) Según el bosquejo que hicieron, ¿aproximadamente cuál es el valor de ***y*** más grande posible? ***y*** = ____________

c) Aproximadamente, ¿cuál es el valor de ***x*** que corresponde a ese valor de ***y***?

x = ____________

d) Usando la expresión, calcula cuál es el volumen para ese valor de ***x***.

y = ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Es este fenómeno lineal por pedazos?

Recuerden que:

Un fenómeno es lineal por pedazos si su gráfica asociada está formada por segmentos de recta.

>>> A lo que llegamos

La expresión $y = x\ (2 - 2x)\ (3 - 2x)$ es conocida como una cúbica, pues al desarrollar los productos se obtiene la expresión $y = 4x^3 - 10x^2 + 6x$ que contiene un término al cubo: x^3 (equis al cubo). La gráfica asociada a una relación cúbica se llama también gráfica de la cúbica.

IV. Desarrollen los productos de $y = x\ (2 - 2x)\ (3 - 2x)$ y verifiquen que les quede $y = 4x^3 - 10x^2 + 6x$.

V. Usando esa expresión contesten:

¿Cuál es el valor de y si x vale 0.39? ____________________

Este valor de y, ¿es más grande que el que habían encontrado en la actividad **III**?

Comparen sus respuestas y comenten, ¿cuál es el valor de x que hace el volumen de la caja lo más grande posible?

>>> Lo que aprendimos

Se desea construir una caja de metal, a partir de una lámina cuadrada de 2 m de lado. Para ello se recortan cuatro cuadrados de lado x, uno de cada esquina.

a) De las siguientes expresiones, ¿cuál permite calcular el volumen y a partir del valor de x? Márquenla.

i) $y = 4x^3 - 10x^2 + 6x$ ii) $y = 4x^3 - 8x^2 + 4x$ iii) $y = 4x^2 - 8x + 4$ iv) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) Observen que el valor de x no puede ser negativo, ni mayor que 1. Después, hagan en su cuaderno la gráfica de la relación anterior.

c) ¿Cuál es el valor de x que maximiza el volumen y? __________

Comparen sus respuestas.

>>> Para saber más

Sobre los cuerpos en aceleración constante, consulten:
¿Dónde están los alpinistas? en su libro de Ciencias II, volumen I. México: SEP/ILCE, 2007.

Sobre la ley de Boyle, consulten:
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/andared02/leyes_gases/ley_boyle.html
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

Algunas características de gráficas no lineales

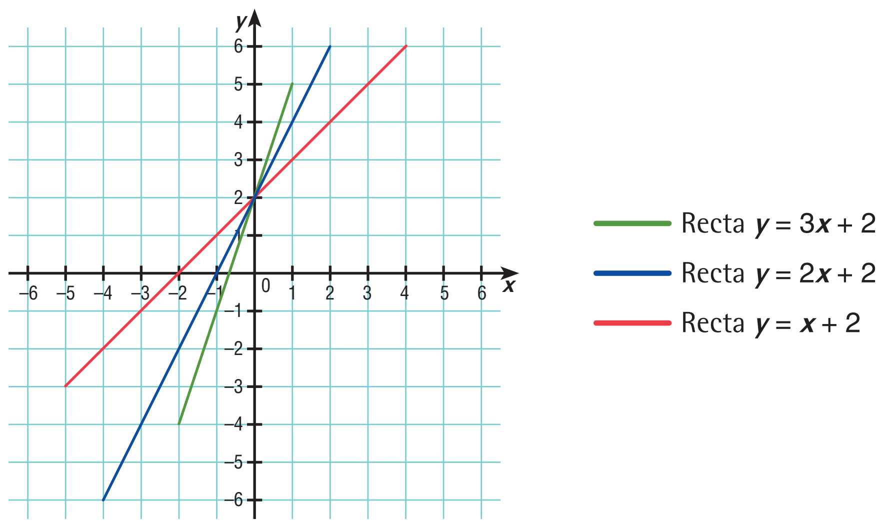
¿Recuerdas que la expresión $y = mx + b$ es la ecuación de una recta? Dependiendo del valor de m y de b, los puntos sobre la recta cambian de posición. Lo mismo sucede con las gráficas que corresponden a expresiones no lineales, hay valores de la expresión que hacen que la forma y posición de los puntos sobre la gráfica cambien.

SESIÓN 1

¡ABIERTAS Y MÁS ABIERTAS!

>>> Para empezar

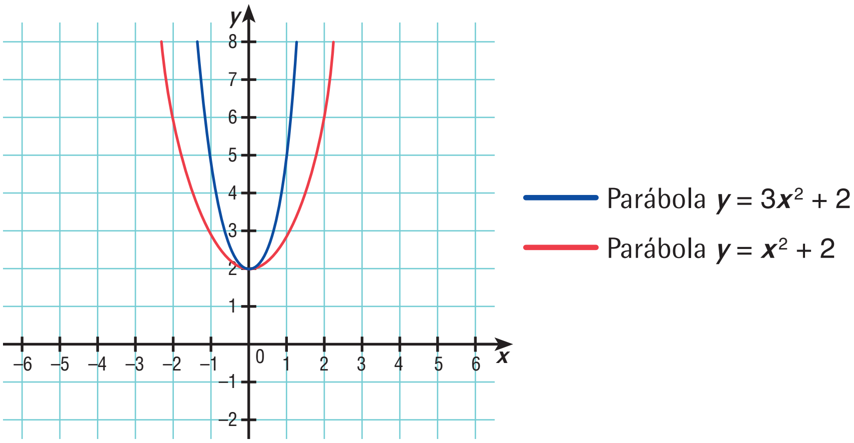
En **Matemáticas I** y **II** estudiaste las características que tienen las expresiones algebraicas cuya gráfica es una línea recta. Por ejemplo, en la secuencia 23 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste que dos o más rectas que tienen la misma ordenada al origen se intersecan en un punto, precisamente en el punto cuya abscisa es cero y cuya ordenada es la ordenada al origen.



En la secuencia 18 de **Matemáticas III**, volumen II, estudiaste fenómenos cuya gráfica y expresión algebraica corresponden a relaciones no lineales. En esta secuencia continuarás explorando las gráficas de este tipo de relaciones.

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente plano cartesiano se encuentra la gráfica de dos expresiones. A partir de ellas, contesta lo que a continuación se pregunta.



a) ¿En qué punto interseca al eje y la gráfica de la expresión $y = 3x^2 + 2$? ________

b) ¿En qué punto interseca al eje y la gráfica de la expresión $y = x^2 + 2$? ________

c) ¿En qué punto intersecará al eje y la gráfica de la expresión $y = 10x^2 + 2$? ________

d) ¿En qué punto intersecará al eje y la gráfica de la expresión $y = \frac{1}{2}x^2$? ________

Comparen sus respuestas y comenten:

e) ¿Se intersecan las gráficas de las cuatro expresiones anteriores? ________

f) Si se intersecan, ¿en qué punto lo hacen? ________

g) Si no se intersecan, ¿por qué que no lo hacen? ________

h) ¿Qué gráficas se intersecan? ________

>>> Manos a la obra

I. Resuelve lo que se te pide a continuación.

a) Calcula los valores de y para cada uno de los valores de x. Con estos datos, completa las tablas a continuación.

x	$y = 2x^2 - 2$
–2	
–1	
0	
1	
2	

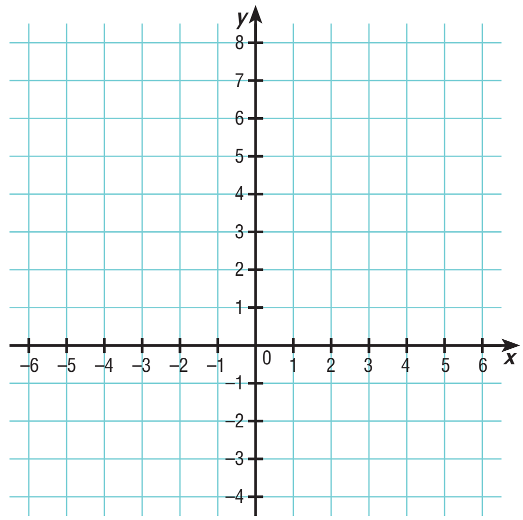
x	$y = x^2 - 2$
–2	
–1	
0	
1	
2	

x	$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$
–2	
–1	
0	
1	
2	

b) En el siguiente plano ubica los puntos de coordenadas (x,y) que calculaste en las tablas anteriores y traza las gráficas de las expresiones correspondientes; usa un color diferente para cada gráfica.

Recuerda que:

Al hacer la gráfica de una expresión algebraica que no es una línea recta, los puntos se unen formando una curva.

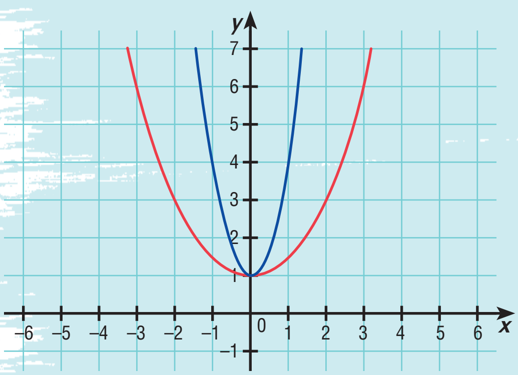


c) ¿En qué punto se intersecan las tres gráficas? ______________________

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

La gráfica de expresiones de la forma $y = ax^2 + b$ es una curva que se llama parábola. En la expresión correspondiente a una parábola, el número b es llamado ordenada al origen.



Parábola $y = 3x^2 + 1$

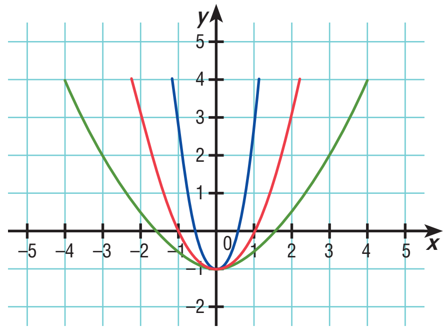
Parábola $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

La ordenada al origen tiene las siguientes propiedades:

- **Es el resultado de evaluar la expresión $y = ax^2 + b$, cuando $x = 0$.**
- **Es la ordenada del punto $(0, b)$ donde la gráfica $y = ax^2 + b$ interseca al eje y.**

Por ejemplo, las parábolas $y = 3x^2 + 1$ así como $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ intersecan al eje y en el punto (0,1). Y ambas tienen ordenada al origen igual que 1.

II. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las gráficas de tres parábolas.



Parábola $y = \frac{1}{3}x^2 - 1$

Parábola $y = x^2 - 1$

Parábola $y = 4x^2 - 1$

Se dice que la parábola roja está más abierta que la parábola azul y más cerrada que la parábola verde.

a) A partir de la información de las gráficas anteriores completa la siguiente tabla:

Expresión algebraica	$y = \frac{1}{3}x^2 - 1$	$y = x^2 - 1$	$y = 4x^2 - 1$	$y = 2x^2 - 1$	$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$
Ordenada al origen				-1	
Coeficiente del término de segundo grado	$\frac{1}{3}$				

b) ¿Qué parábola está **más abierta**, $y = 2x^2 - 1$ o bien $y = 4x^2 - 1$? __________ ; ¿por qué? ______________________________

c) ¿En qué expresión el coeficiente del término de segundo grado es mayor, en $y = 2x^2 - 1$ o bien en $y = 4x^2 - 1$? ________________

d) ¿Qué parábola está **más abierta** que todas las demás? ______________

e) ¿Qué coeficiente del término de segundo grado tiene esa parábola? ________ ______________

f) Completa la siguiente tabla para encontrar algunos puntos de coordenadas (x, y) de las gráficas.

x	$y = 4x^2 - 1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Recuerda que:

Cuando el coeficiente de un término es igual a 1, se acostumbra no escribirlo para simplificar.

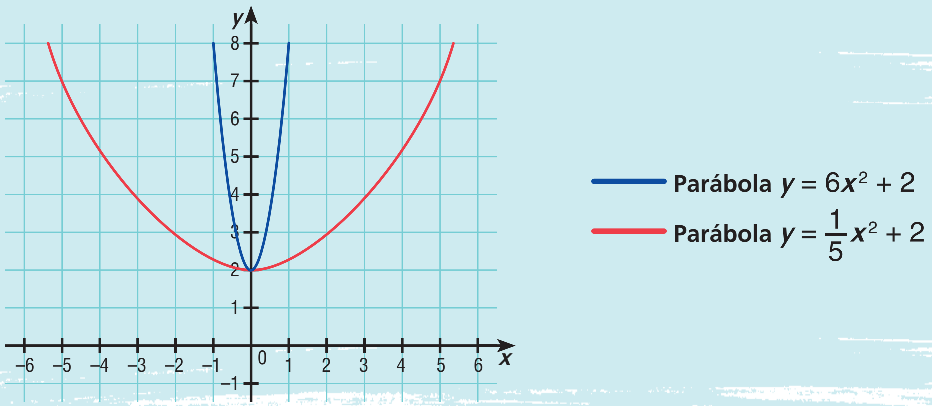
Por ejemplo, en la expresión $x^2 + 2x + 3$, el coeficiente del término de segundo grado es 1.

g) En el plano cartesiano grafica los puntos anteriores y verifica tus respuestas a los incisos b) y d).

Comparen sus respuestas y comenten la siguiente información.

>>> A lo que llegamos

El número a en una expresión de la forma $y = ax^2 + b$ indica la abertura de la parábola. Mientras menor sea el número a, la parábola estará más abierta. Por ejemplo, la parábola $y = \frac{1}{5}x^2 + 2$ está más abierta que la parábola $y = 6x^2 + 2$, pues $\frac{1}{5} < 6$.



>>> Lo que aprendimos

1. Encuentra la ordenada al origen de cada una de las siguientes parábolas:

a) $y = 6x^2 - 1$ Ordenada al origen: ____________________

b) $y = x^2 - 2$ Ordenada al origen: ____________________

c) $y = \frac{1}{6}x^2 - 1$ Ordenada al origen: ____________________

d) ¿Qué parábola está más abierta, $y = 6x^2 - 1$ o $y = \frac{1}{6}x^2 - 1$?

____

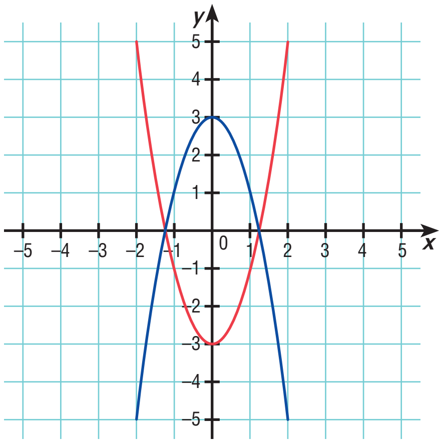
e) En tu cuaderno grafica las parábolas para verificar que tus respuestas sean correctas.

¡PARA ARRIBA Y PARA ABAJO!

SESIÓN 2

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente plano se encuentran las gráficas de dos parábolas.



a) ¿En qué punto interseca al eje y la parábola roja? ______________________________

b) ¿En qué punto interseca al eje y la parábola azul? ______________________________

c) La expresión algebraica asociada a la parábola roja es $y = 2x^2 - 3$. ¿Cuál es la expresión algebraica asociada a la parábola azul? Subráyala.

$y = -2x^2$ $\qquad$ $y = -2x^2 - 3$ $\qquad$ $y = -2x^2 + 3$

Completa la siguiente tabla para encontrar algunos de los elementos de las parábolas:

Expresión algebraica	$y = -2x^2 - 3$	$y = -2x^2$	$y = -2x^2 + 3$	$y = 2x^2 + 3$
Ordenada al origen				
Coeficiente del término de segundo grado				

Comparen sus respuestas. Elijan una expresión de las que aparecen en la tabla y calculen los valores de y para los valores que se indican de x. Verifiquen que la respuesta dada en el inciso c) sea correcta.

x	**Expresión elegida:** ______________________
–1	
1	

>>> Manos a la obra

I. Realiza las siguientes actividades:

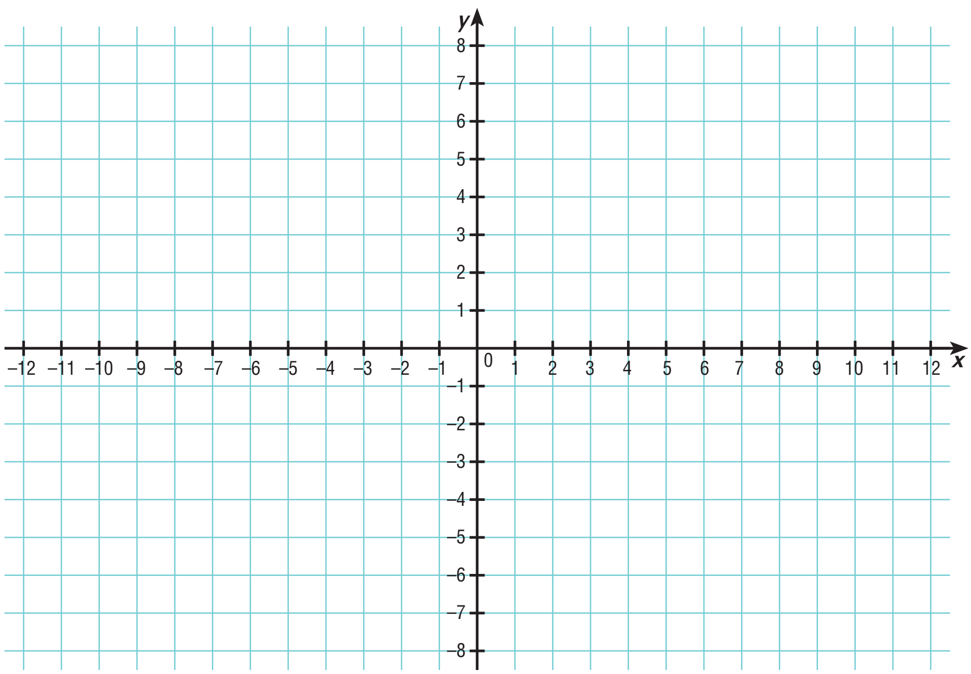
a) Completa las tablas para encontrar algunos puntos de las expresiones anteriores.

x	$y = -2x^2$	Punto (x,y)
–2	–8	(–2,–8)
–1		(–1, ____)
0		(0, ____)
1	–2	(1,–2)
2		(2, ____)

x	$y = -2x^2 + 3$	Punto (x,y)
–2	–5	(–2,–5)
–1		(–1, ____)
0		(0, ____)
1	1	(1,1)
2		(2, ____)

x	$y = 2x^2 + 3$	Punto (x,y)
–2	11	(–2,11)
–1		(–1, ____)
0		(0, ____)
1	5	(1,5)
2		(2, ____)

b) Grafica los puntos que encontraste en el siguiente plano cartesiano y completa las gráficas. Usa colores distintos para cada una de las gráficas.



c) ¿La parábola $y = -2x^2$ abre hacia arriba o hacia abajo? ____________________

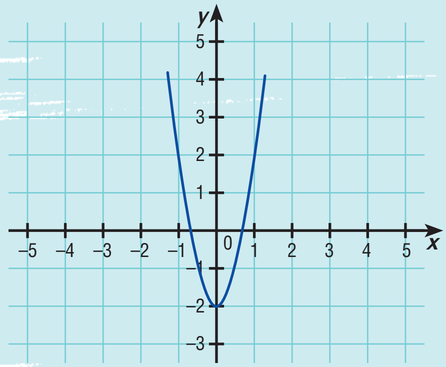
d) ¿La parábola $y = 2x^2 + 3$ abre hacia arriba o hacia abajo? ____________________

Comparen sus respuestas y verifiquen que la expresión que corresponde a la parábola roja del apartado *Consideremos lo siguiente* sea la correcta.

>>> A lo que llegamos

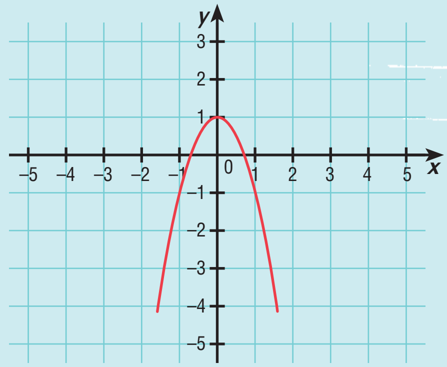
En las expresiones de la forma $y = ax^2 + b$, la constante a indica hacia donde abre la parábola.

Si a es un número positivo, la parábola abre hacia arriba.



Parábola $y = 4x^2 - 2$

Si a es un número negativo, la parábola abre hacia abajo.



Parábola $y = -2x^2 + 1$

II. Para la expresión $y = -2x^2 + 3$ contesta:

a) ¿El coeficiente del término de segundo grado es positivo o negativo?

____

b) ¿La parábola abre para arriba o para abajo? _______________________

c) ¿Cuál es el mayor valor que toma y? _______________________

III. Para la expresión $y = 2x^2 + 3$ contesta:

a) ¿El coeficiente del término de segundo grado es positivo o negativo?

____

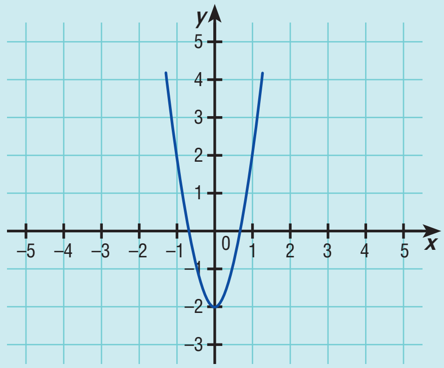
b) ¿La parábola abre para arriba o para abajo? _______________________

c) ¿Cuál es el menor valor que toma y? ____________

>>> A lo que llegamos

En una parábola, el punto que corresponde al menor o al mayor valor que toma la ordenada se llama **vértice**.

Si la parábola abre hacia arriba, el vértice es su punto más bajo.

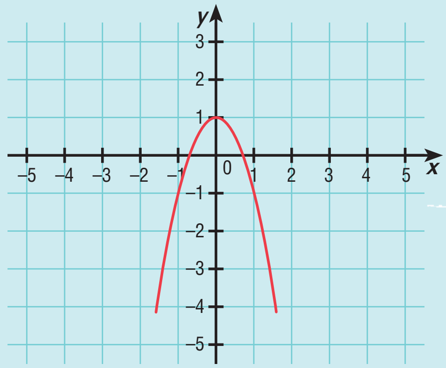


Parábola $y = 4x^2 - 2$

Vértice: (0,–2)

Menor valor de y: – 2

Si la parábola abre hacia abajo, el vértice es su punto más alto.



Parábola $y = -2x^2 + 1$

Vértice: (0,1)

Mayor valor de y: 1

>>> Lo que aprendimos

Completa la siguiente tabla para encontrar los elementos de algunas parábolas:

Expresión	Ordenada al origen	Hacia dónde abre	Vértice
$y = x^2 + 5$			(0,5)
$y = -2x^2 + 3$			
$y = x^2$	0		
$y = -x^2 - 2$			
$y = -7x^2 + 2$		Hacia abajo	

Comparen sus respuestas y en su cuaderno hagan las gráficas para verificar que la tabla la completaron correctamente.

LAS DESPLAZADAS

>>> Consideremos lo siguiente

Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas de las parábolas con sus expresiones algebraicas.

Parábola verde ( )

Parábola roja ( )

Parábola rosa ( )

Parábola azul ( )

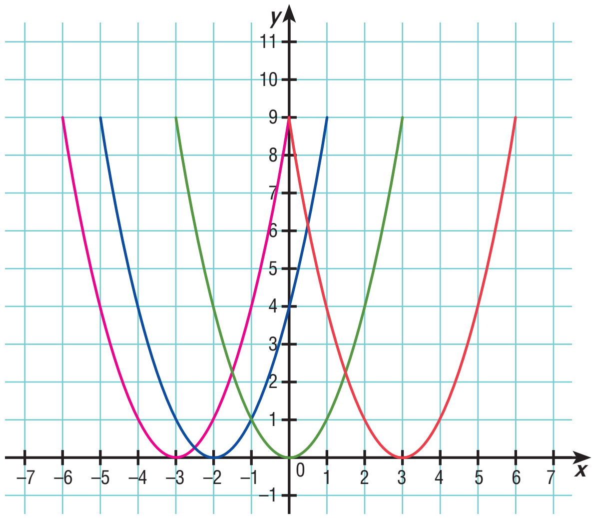
A. $y = (x - 3)^2$

B. $y = (x - 0)^2$

C. $y = (x + 2)^2$

D. $y = (x + 3)^2$

E. $y = (x - 1)^2$



Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados.

>>> Manos a la obra

I. Contesta lo que se te pide a continuación.

a) Escribe en la tabla el valor que toma y para cada valor de x.

x	–1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 3)^2$			4		0		4

Verifica que los puntos (x,y), cuyas coordenadas calculaste al completar la tabla, estén sobre la parábola que elegiste.

b) ¿Cuál es la ordenada al origen?

____

c) ¿En qué punto (x,y) interseca la gráfica de la expresión al eje x? _______________

d) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de esta parábola?

____

Recuerda que:

*El vértice de la parábola es el punto que corresponde al menor o al mayor valor que toma la ordenada **y**.*

Si la parábola abre hacia arriba, el vértice es el punto más bajo de la parábola.

Si la parábola abre hacia abajo, el vértice es el punto más alto de la parábola.

e) Para la expresión $y = (x + 2)^2$, completa la siguiente tabla:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
$y = (x + 2)^2$	9			0			9

Verifica que los puntos (x,y) de la tabla estén sobre la parábola que elegiste.

f) ¿Cuál es la ordenada al origen? ____________________

g) ¿En qué punto interseca al eje x la gráfica de la expresión? ____________

h) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de esta parábola? ____________

II. Completa la siguiente tabla para encontrar algunos elementos de las parábolas.

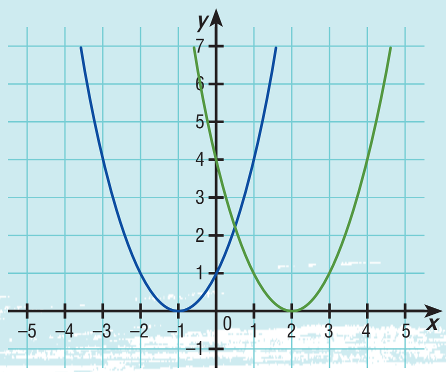
	Expresión	Punto de intersección con el eje y	Ordenada al origen	Punto de intersección con el eje x	Vértice
Parábola azul	$y = (x + 2)^2$	(0,4)	4		(–2,0)
Parábola verde				(0,0)	
Parábola rosa				(–3,0)	
Parábola roja		(0,9)	9		

Recuerden que:
La ordenada al origen es el valor de la ordenada correspondiente al valor $x = 0$.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión de la forma $y = (x + c)^2$ es una parábola con vértice en el punto $(x,y) = (0,-c)$



Parábola: $y = (x + 1)^2$
Ordenada al origen: $1^2 = 1$
Vértice de la parábola: (0,–1)

Parábola: $y = (x - 2)^2$
Ordenada al origen: $2^2 = 4$
Vértice de la parábola: (0,2)

III. En el siguiente plano cartesiano están graficadas cuatro parábolas. Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas de las parábolas con sus expresiones algebraicas.

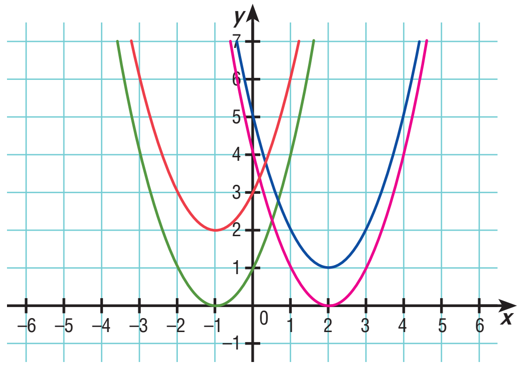
Parábola roja ( )

Parábola verde ( )

Parábola azul ( )

Parábola rosa ( )

1. $y = (x - 2)^2 + 1$
2. $y = (x + 1)^2$
3. $y = (x - 2)^2$
4. $y = (x + 1)^2 + 2$
5. $y = (x - 1)^2 + 1$



Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados.

IV. Completa la siguiente tabla:

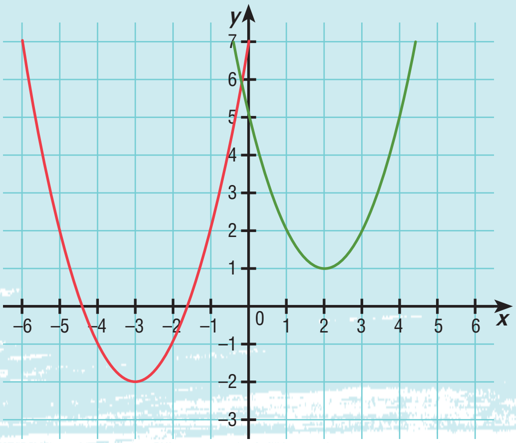
	Expresión	Ordenada al origen	Punto de intersección con el eje *y*	Vértice de la parábola	Punto de intersección con el eje *x*	Hacia dónde abre
Parábola azul			(0,5)			
Parábola verde					(–1,0)	Hacia arriba
Parábola roja		3			No interseca al eje *x*	
Parábola rosa				(2,0)		

Comparen sus respuestas. Si tienen dudas, hagan una tabla como la siguiente para verificar que las coordenadas (x,y) que se obtienen son puntos que están sobre la parábola que eligieron.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
Expresión elegida: ______							

>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión de la forma $y = (x + c)^2 + b$ es una parábola que abre hacia arriba y tiene vértice en el punto $(-c, b)$.



Parábola: $y = (x + 3)^2 - 2$
Ordenada al origen: 7
Vértice de la parábola: (–3,–2)

Parábola: $y = (x - 2)^2 + 1$
Ordenada al origen: 5
Vértice de la parábola: (2,1)

Para conocer más sobre la parábola, pueden ver el programa *Elementos de la parábola*.

>>> Lo que aprendimos

1. Las gráficas de las siguientes tres expresiones son parábolas.

- $y = (x - 3)^2 - 3$
- $y = (x - 1)^2 - 5$
- $y = (x + 2)^2 + 4$

En tu cuaderno encuentra la ordenada al origen y el vértice. Con los datos que obtuviste y, sin hacer tablas, construye un bosquejo de la gráfica de cada una de las parábolas; usa colores diferentes para cada una de ellas.

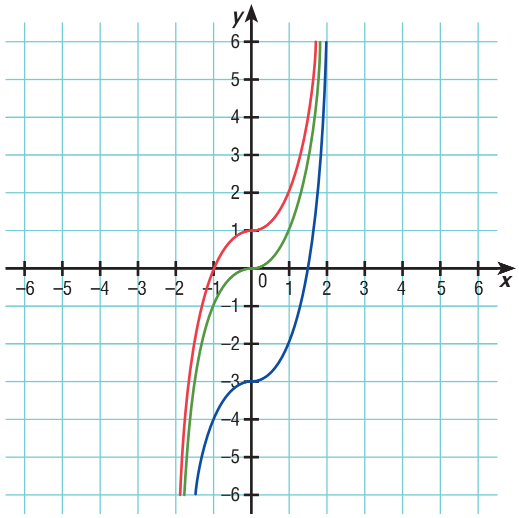
¡AHÍ LES VAN UNAS CÚBICAS!

SESIÓN 4

>>> Para empezar

En la secuencia 18 de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste que la gráfica de una expresión de la forma: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se llama ***cúbica***. En esta sesión seguirás explorando las cúbicas.

En el siguiente plano cartesiano se graficaron tres cúbicas.



Con la información de las gráficas anteriores completen la siguiente tabla:

Cúbica	Ordenada al origen
Roja	
Verde	
Azul	

Recuerden que:

*La ordenada al origen es la ordenada del punto en el que la gráfica interseca al eje **y**.*

>>> Consideremos lo siguiente

Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas de las cúbicas con sus expresiones algebraicas.

Cúbica roja ( )

Cúbica verde ( )

Cúbica azul ( )

A. $y = x^3$

B. $y = x^3 - 3$

C. $y = 3x^3$

D. $y = x^3 + 1$

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Completa las siguientes tablas para encontrar algunos puntos de las cúbicas anteriores.

x	$y = x^3$
–2	–8
–1	
0	0
1	
2	

x	$y = x^3 - 3$
–2	–11
–1	
0	–3
1	
2	

x	$y = 3x^3$
–2	–24
–1	
0	
1	
2	24

x	$y = x^3 + 1$
–2	
–1	0
0	
1	
2	9

En el plano cartesiano del apartado *Para empezar*, grafica los puntos que encontraste. Verifica que las expresiones que elegiste sean las correctas.

II. A partir de la información de las tablas, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué número hay que restar a las ordenadas de la columna $y = x^3$ para obtener las ordenadas de la columna $y = x^3 - 3$? ________________

b) ¿Qué número hay que sumar a las ordenadas de la columna $y = x^3$ para obtener las ordenadas de la columna $y = x^3 + 1$? ________________

c) ¿Cuál es la ordenada al origen de la expresión $y = x^3 - 3$? ________________

d) ¿Cuál es la ordenada al origen de la expresión $y = x^3 + 1$? ________________

e) ¿Cuál es la ordenada al origen de la expresión $y = 3x^3$? ________________

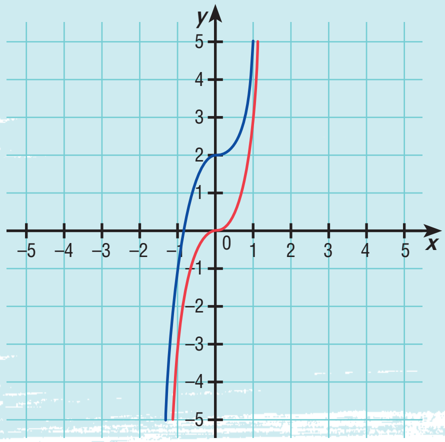
Comparen sus respuestas y comenten la siguiente información.

>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión cúbica de la forma $y = ax^3 + b$ es una curva cuya **ordenada al origen** es el número b.

Cuando dos o más expresiones de este tipo tienen distinta ordenada al origen pero el mismo coeficiente a, se dice que sus gráficas están **desplazadas** una respecto de la otra.

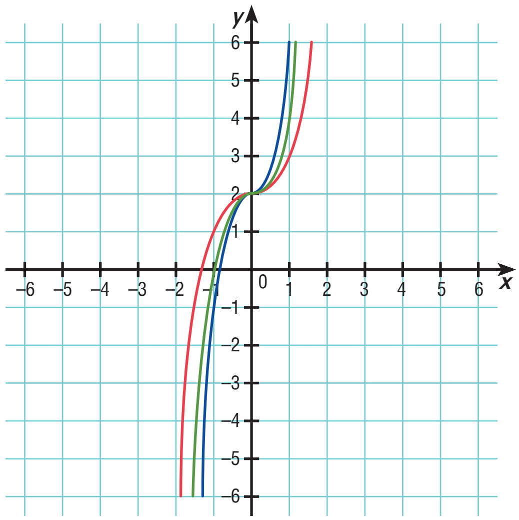
Por ejemplo, la gráfica de la expresión $y = 3x^3 + 2$ está desplazada dos unidades hacia arriba respecto de la gráfica de la expresión $y = 3x^3$.



Expresión $y = 3x^3 + 2$

Expresión $y = 3x^3$

III. En el siguiente plano cartesiano verás las gráficas de tres expresiones.



Expresión: $y = x^3 + 2$

Expresión: $y = 3x^3 + 2$

Expresión: $y = 2x^3 + 2$

a) ¿En qué punto se intersecan estas tres gráficas? ____________________

b) ¿En que punto intersecara la gráfica de $y = 4x^3 + 2$ a la gráfica de $y = x^3 + 2$?

____

c) ¿En que punto intersecara la gráfica de $y = 5x^3 + 2$ a la gráfica de $y = x^3 + 2$?

____

IV. Completa las siguientes tablas para encontrar las coordenadas de algunos puntos de la expresión $y = 4x^3 + 2$ y de la expresión $y = 5x^3 + 2$; ubica estos puntos en el plano cartesiano anterior y verifica tus respuestas.

x	$y = 4x^3 + 2$
–2	
–1	
0	
1	
2	

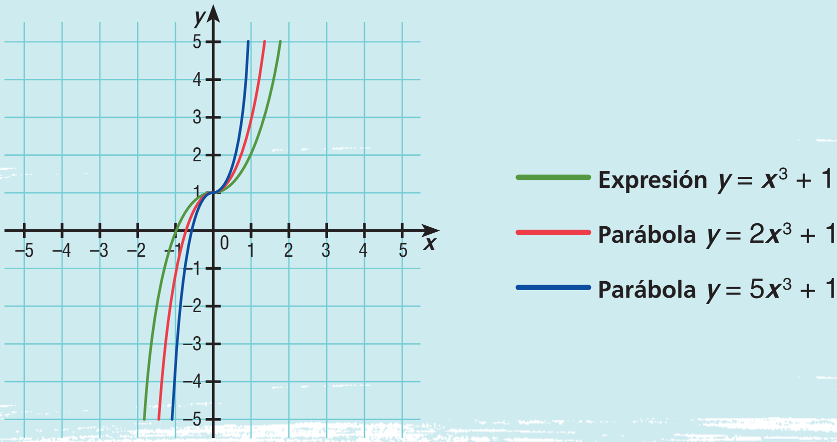
x	$y = 5x^3 + 2$
–2	
–1	
0	
1	
2	

Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados

>>> A lo que llegamos

Al igual que dos rectas $y = mx + b$ que tienen la misma ordenada al origen se intersecan en el punto $(0, b)$, dos o más cúbicas de la forma $y = ax^3 + b$ que tengan la misma ordenada al origen b se intersecan en el punto $(0, b)$.

Por ejemplo, las gráficas de $y = x^3 + 1$, $y = 2x^3 + 1$ así como $y = 5x^3 + 1$ se intersecan en el punto (0,1).



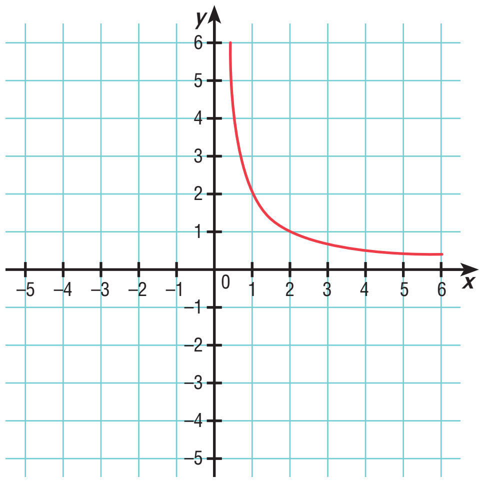
Para conocer más sobre las gráficas de expresiones de la forma $y = ax^3 + b$, pueden ver el programa *Elementos de la cúbica*.

¡AHÍ LES VAN UNAS HIPÉRBOLAS!

>>> Para empezar

En la secuencia 33 de tu libro de **Matemáticas I**, volumen II, aprendiste que la expresión algebraica asociada a una relación de ***proporcionalidad inversa*** es de la forma $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de la relación de proporcionalidad inversa. La gráfica asociada a este tipo de expresión es una curva llamada ***hipérbola***.

En el siguiente plano cartesiano se graficó parte de la expresión $y = \frac{2}{x}$. Se graficaron los puntos que tienen abscisas positivas ($x > 0$).



Completa la siguiente tabla para encontrar las coordenadas de algunos puntos de la gráfica que tienen abscisas negativas ($x < 0$). Luego, localízalos en el plano cartesiano de arriba.

x	$y = \frac{2}{x}$	Punto (x,y)
–5		
–4		
–3		
–2		
–1		

Comenten: ¿encuentran alguna relación entre la parte de la curva que dibujaron ($x < 0$) respecto de la que ya estaba ($x > 0$)?

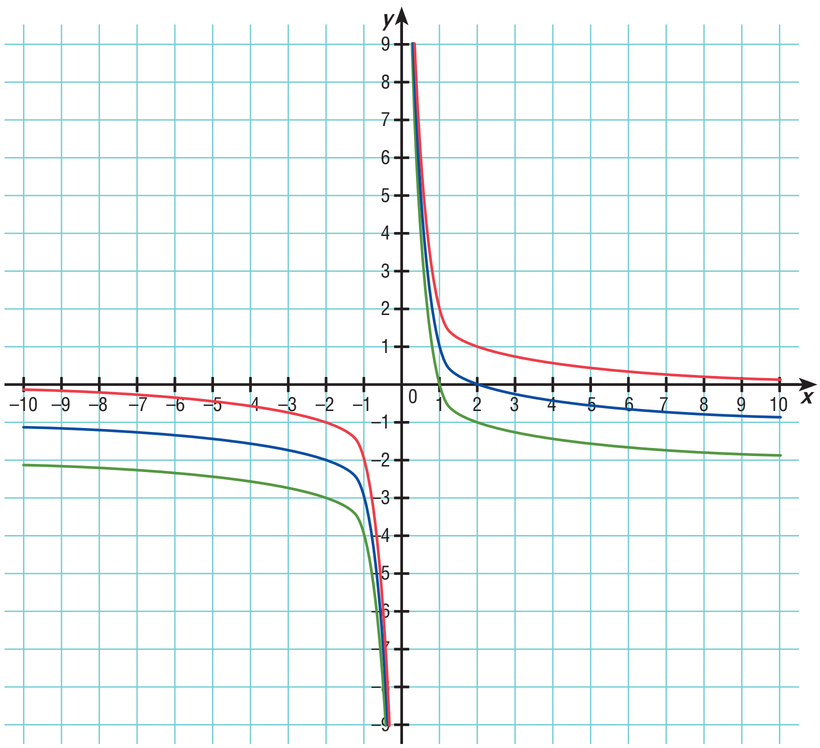
Completen la siguiente tabla para comparar las coordenadas de los puntos de las dos partes de la gráfica.

x	$y = \frac{2}{x}$	Punto (x, y)
5		
4		
3		
2		
1		

La gráfica de una expresión de la forma $y = \frac{k}{x}$ es una curva llamada hipérbola. A las dos partes de esa gráfica se les llama ramas de la hipérbola.

>>> Consideremos lo siguiente

En el siguiente plano cartesiano se graficaron tres hipérbolas (cada una de ellas con sus dos ramas).



La gráfica de $y = \frac{2}{x}$ es la hipérbola roja.

Relaciona las columnas para hacer corresponder las hipérbolas con sus expresiones algebraicas.

Hipérbola verde (   )

Hipérbola azul (   )

A. $y = \frac{2}{x} + 1$

B. $y = \frac{2}{x} - 2$

C. $y = \frac{2}{x} - 1$

Comparen sus respuestas y comenten:

Los puntos (1,1) y (–2,–2) se encuentran sobre la hipérbola azul. Completen la siguiente tabla para verificar que la expresión que eligieron sea correcta.

x	**La expresión que eligieron:** $y =$ ______	**Punto (x,y)**
1		(1, ____)
–2		(–2, ____)

>>> Manos a la obra

I. Completa las siguientes tablas para encontrar las coordenadas de algunos puntos de las expresiones anteriores.

x	$y = \frac{2}{x} + 1$
–4	
–2	0
–1	
1	
2	2
4	

x	$y = \frac{2}{x} - 2$
–4	
–2	–3
–1	
1	0
2	
4	

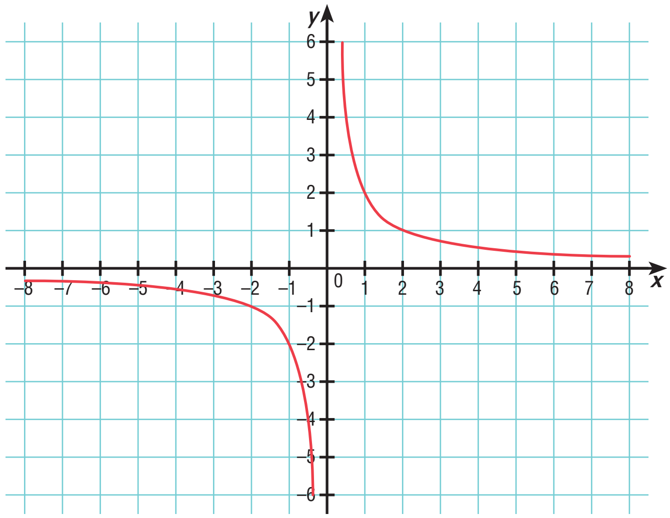
x	$y = \frac{2}{x}$
– 4	
–2	–1
–1	
1	
2	
4	1

a) ¿Qué número hay que sumar a la columna de la expresión $y = \frac{2}{x}$ para obtener la columna de la expresión $y = \frac{2}{x} + 1$? ______

b) ¿Qué número hay que restar a la columna de la expresión $y = \frac{2}{x}$ para obtener la columna de la expresión $y = \frac{2}{x} - 2$? ______

c) ¿Qué número hay que restar a la expresión $y = \frac{2}{x}$ para obtener la expresión $y = \frac{2}{x} - 2$? ______

d) En el siguiente plano se encuentra la gráfica de la expresión $y = \frac{2}{x}$; dibuja los puntos anteriores para trazar la gráfica de las otras dos expresiones; usa colores diferentes para cada gráfica.



Recuerda que:
La división entre cero no está definida, es decir, no puede dividirse un número por cero.

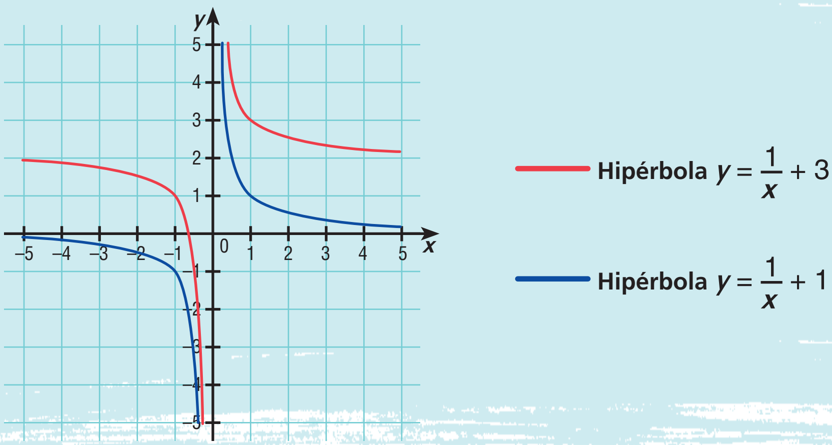
Comparen sus respuestas y comenten la siguiente información.

>>> A lo que llegamos

La gráfica de una expresión de la forma $y = \frac{a}{x} + b$ se llama **hipérbola.**

Cuando dos o más expresiones de la forma $y = \frac{a}{x} + b$ tienen el mismo valor de a pero diferente valor para b, sus gráficas están desplazadas una respecto de la otra.

Por ejemplo, la hipérbola $y = \frac{1}{x} + 3$ está **desplazada hacia arriba dos unidades** respecto de la hipérbola $y = \frac{1}{x} + 1$.



II. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿En qué punto la expresión $y = \frac{2}{x} - 1$ interseca al eje x? ______________

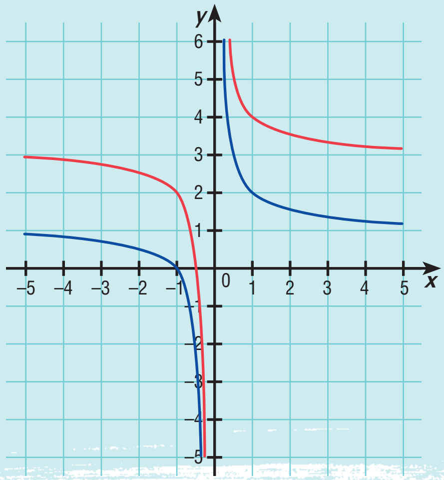
b) ¿En qué punto la expresión $y = \frac{2}{x} - 2$ interseca al eje x? ______________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Pertenecerá el punto (0,0) a la gráfica de $y = \frac{2}{x}$?

b) ¿Qué sucede en la expresión $y = \frac{2}{x} + b$ para el valor de $y = 0$?

En las expresiones de la forma $y = \frac{a}{x} + b$, el valor de y no está definido cuando $x = 0$.
Si b es cero, la hipérbola no interseca a ninguno de los ejes.
Si b no es cero, la hipérbola interseca al eje x en un solo punto. Por ejemplo:



Hipérbola $y = \frac{1}{x} + 3$
Punto de intersección con el eje x: $(-\frac{1}{3},0)$

Hipérbola $y = \frac{1}{x} + 1$
Punto de intersección con el eje x: $(-1,0)$

Para conocer más sobre la hipérbola, pueden ver el programa *Elementos de la hipérbola*.

>>> Lo que aprendimos

Completa la siguiente tabla:

Hipérbola	Punto de intersección con el eje x
$y = \frac{4}{x}$	
$y = \frac{1.5}{x} + 6$	
$y = \frac{3}{x} + 1$	

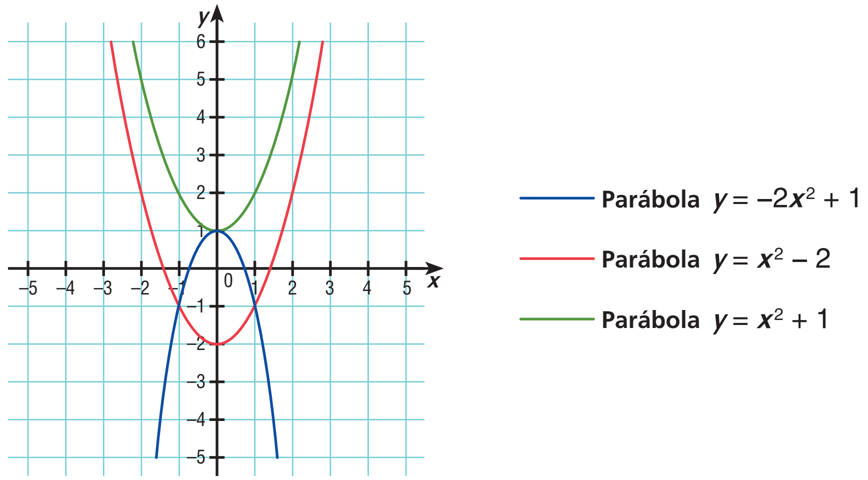
En tu cuaderno grafica las hipérbolas para verificar que completaste correctamente la tabla.

SESIÓN 6

EFECTOS ESPECIALES

>>> Lo que aprendimos

1. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las gráficas de tres parábolas.

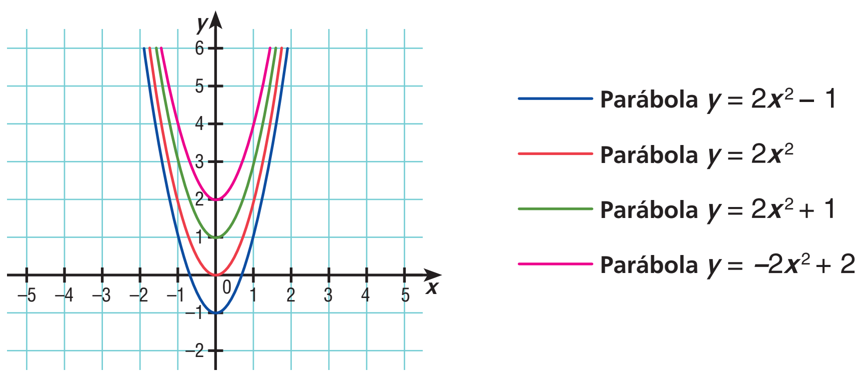


a) Usa dos colores distintos para graficar $y = -2x^2 + 2$, $y = x^2 + 4$ en el mismo plano cartesiano.

b) Completa la siguiente tabla para encontrar algunos elementos de las parábolas anteriores.

Parábola	Ordenada al origen	Hacia dónde abre	Vértice
$y = -2x^2 + 1$	1		(0,1)
$y = x^2 - 1$		Hacia arriba	
$y = x^2 - 2$	–2		(0,–2)
$y = -2x^2 - 2$		Hacia abajo	
$y = 2x^2 + 4$	4		

2. En el siguiente plano cartesiano se encuentran las gráficas de cuatro parábolas.



a) Completa las siguientes tabla para encontrar las coordenadas de algunos puntos de las expresiones $y = 2x^2$ así como $y = 2x^2 - 2$.

x	$y = 2x^2$
–2	8
–1	2
0	0
1	2
2	8

x	$y = 2x^2 - 2$
–2	6
–1	
0	
1	
2	

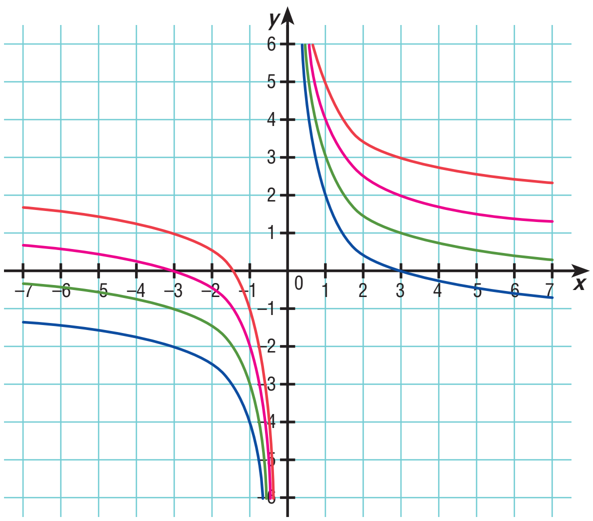
b) ¿Qué número hay que restarle a la columna de la expresión $y = 2x^2$ para obtener la columna de la expresión $y = 2x^2 - 2$? ________________

c) ¿Qué número hay que restarle a la expresión $y = 2x^2$ para obtener la expresión $y = 2x^2 - 2$? ________________

Comparen sus respuestas y comenten:

Cualquier parábola de la forma $y = 2x^2 + b$, con b un número con signo, se puede obtener de la parábola $y = 2x^2$, si desplazamos esta parábola b unidades hacia arriba si el número b es positivo o bien hacia abajo si b es negativo.

3. En el siguiente plano cartesiano hay cuatro hipérbolas.



Hipérbola $y = \frac{3}{x} - 1$

Hipérbola $y = \frac{3}{x}$

Hipérbola $y = \frac{3}{x} + 1$

Hipérbola $y = \frac{3}{x} + 2$

a) ¿Cómo se puede obtener la hipérbola $y = \frac{3}{x} - 1$ a partir de la hipérbola $y = \frac{3}{x}$?

____

b) ¿Cómo se puede obtener la hipérbola $y = \frac{3}{x} + 1$ a partir de la hipérbola $y = \frac{3}{x}$?

____

4. Relaciona las columnas para hacer corresponder las gráficas con sus expresiones algebraicas.

a) $y = (x - 3)^2 - 3$

b) $y = -2x^2 + 3$

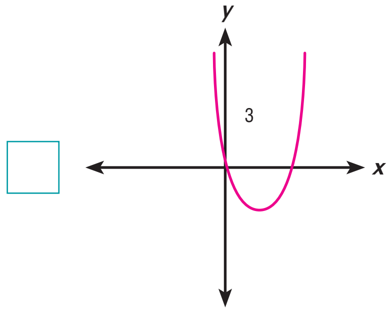
c) $y = x^3 + 3$

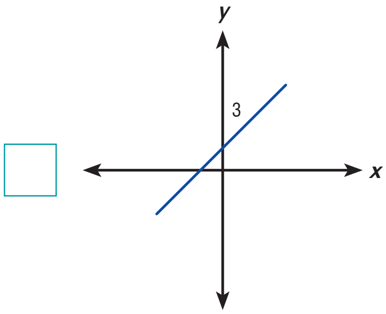
d) $y = x + 3$

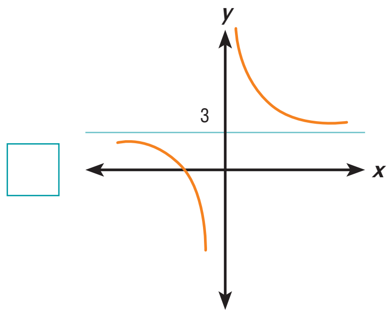
e) $y = \frac{2}{x}$

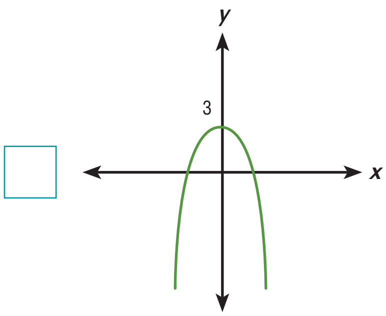
f) $y = \frac{2}{x} + 3$

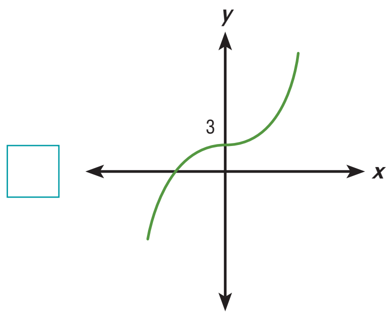
g) $y = 2x^2 - 3$

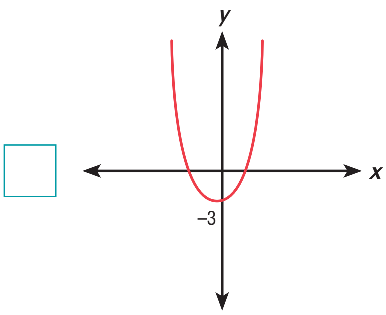


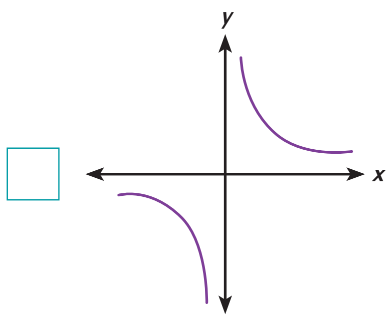






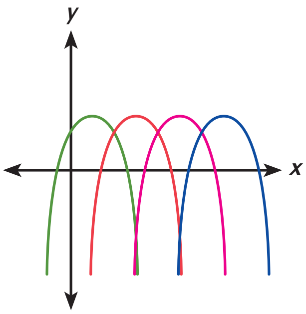


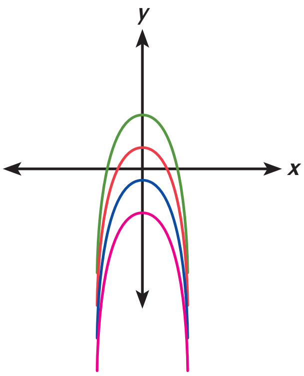


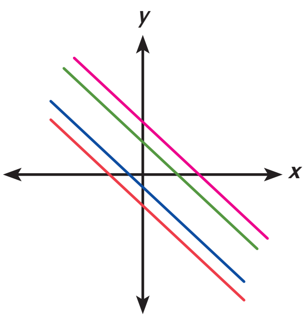


5. A continuación hay tres planos cartesianos. En cada uno de ellos hay un conjunto o familia de gráficas.

Relaciona las familias de gráficas con sus correspondientes conjuntos de expresiones algebraicas.

☐ 

☐ 

☐ 

a) $y = -x^2 - 3$

$y = -x^2 - 1$

$y = -x^2 + 1$

$y = -x^2 - 3$

b) $y = -x - 2$

$y = -x - 1$

$y = -x + 1$

$y = -x + 2$

c) $y = -(x - 2)^2 + 3$

$y = -(x - 4)^2 + 3$

$y = -(x - 6)^2 + 3$

$y = -(x - 8)^2 + 3$

d) $y = \frac{5}{x} - 4$

$y = \frac{5}{x}$

$y = \frac{5}{x} + 1$

$y = \frac{5}{x} + 4$

>>> Para saber más

Sobre la función cuadrática y su gráfica, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funcion_cuadratica_parabola/index.htm
Ruta: Índice → características
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].

Sobre la función hipérbola y su gráfica, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Representacion_interpretacion_graficas/index.htm
Ruta: Índice → funciones de proporcionalidad inversa
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

SECUENCIA 20

Gráficas por pedazos

En esta secuencia aprenderás a interpretar y elaborar gráficas formadas por segmentos de líneas rectas y curvas que modelan llenado de recipientes y objetos en movimiento.

SESIÓN 1

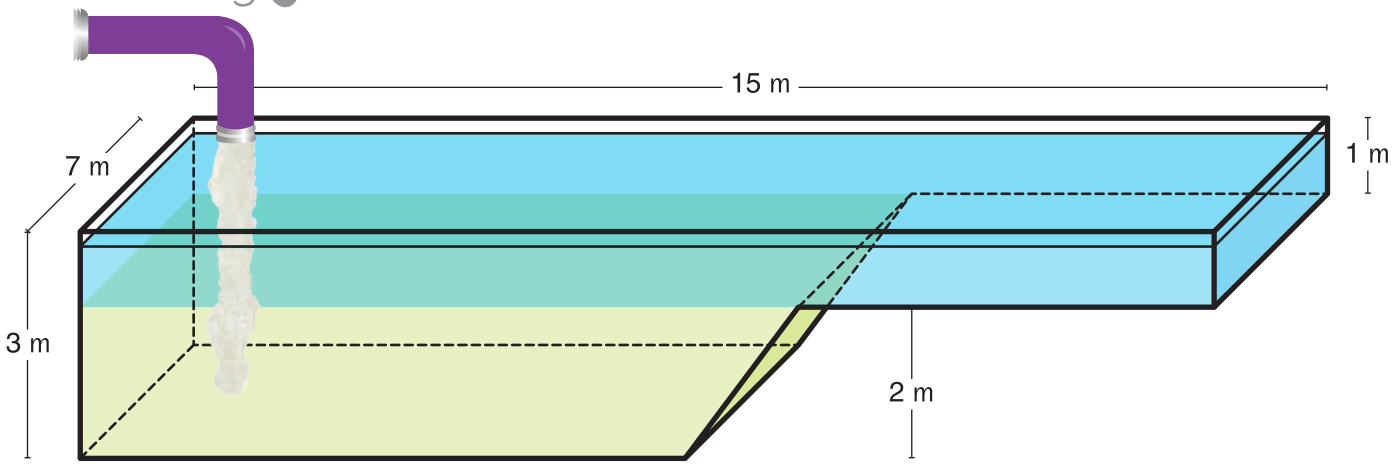
LAS ALBERCAS

>>> Para empezar

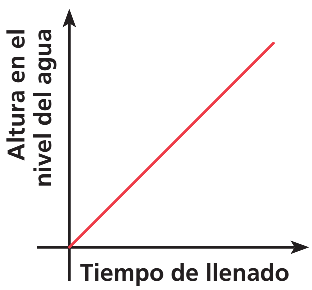
En la secuencia 29 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste a interpretar y elaborar gráficas formadas por segmentos de líneas rectas. En esta secuencia estudiarás gráficas formadas por secciones rectas y curvas.

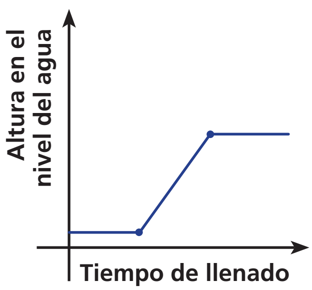
>>> Consideremos lo siguiente

Para llenar la alberca de la figura a continuación, se abre una llave que arroja siempre la misma cantidad de agua. Conforme va transcurriendo el tiempo, el nivel del agua que tiene la alberca va aumentando.

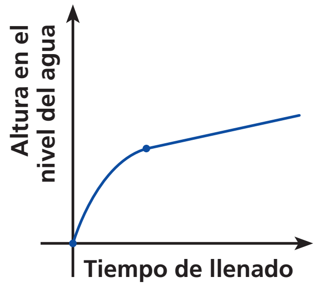


De las siguientes gráficas, ¿cuál representa la variación del nivel de agua respecto del tiempo transcurrido? Pon una ✓ a la que elijas.

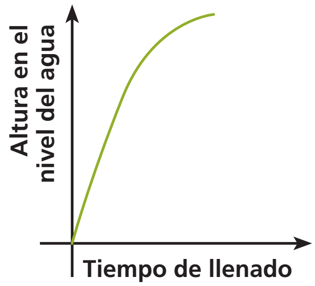




☐



☐

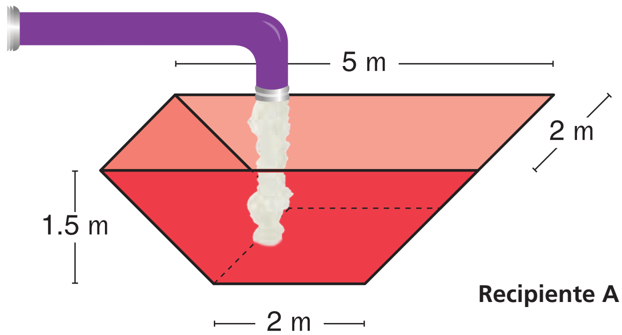


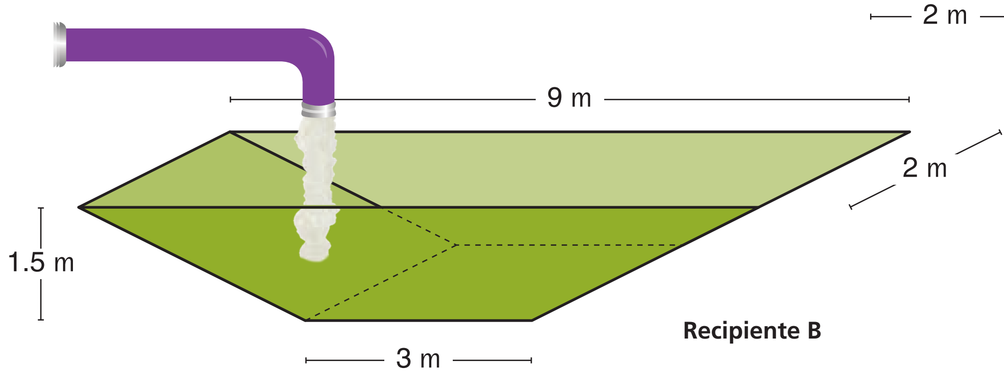
☐

Comparen sus resultados y comenten cómo eligieron la gráfica correcta.

>>> Manos a la obra

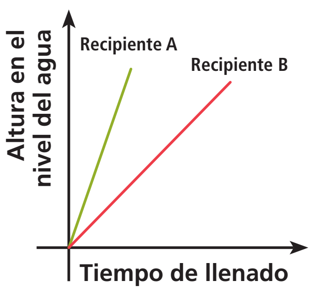
I. Los siguientes dos recipientes se comienzan a llenar al mismo tiempo, cada uno con una llave. Las dos llaves arrojan la misma cantidad de agua.



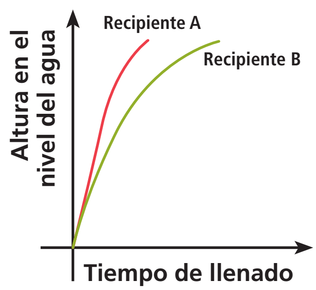


a) ¿Cuál de los dos recipientes se llenará primero? ________

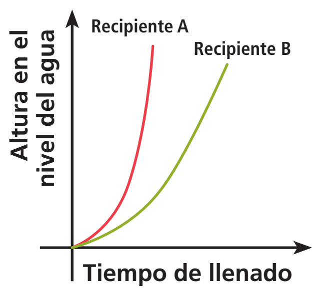
b) ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde al llenado de los recipientes? Pon una ✓ a la que elijas.



☐



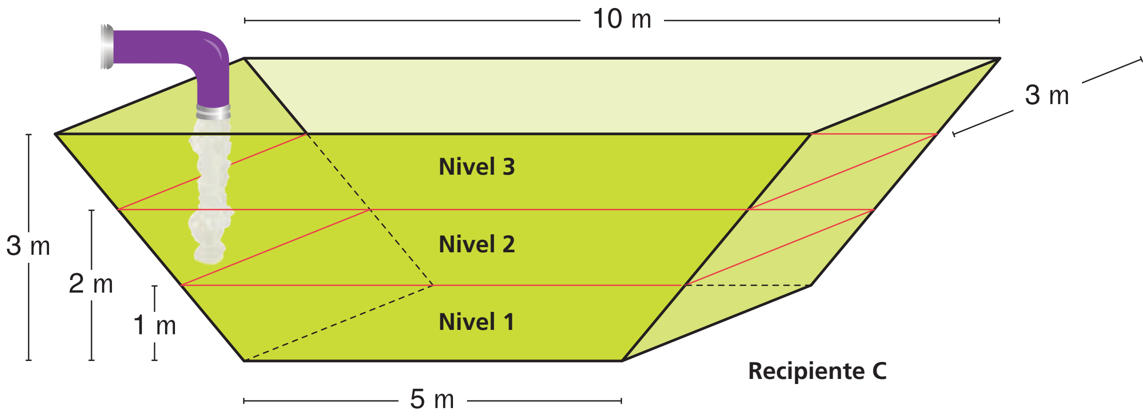
☐



☐

Comparen sus respuestas y comenten cómo decidieron cuál gráfica es la correcta.

II. A continuación se presenta otro recipiente: el recipiente C.



Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿A qué parte del recipiente C le cabe más agua, al nivel 1 o al nivel 2? ____________

Si se llenaran por separado cada uno de los niveles del recipiente C, suponiendo que la cantidad de agua que cae cada segundo lo hace de manera constante.

b) ¿Qué parte del recipiente C tarda más tiempo en llenarse, el nivel 1 o el nivel 2?

____

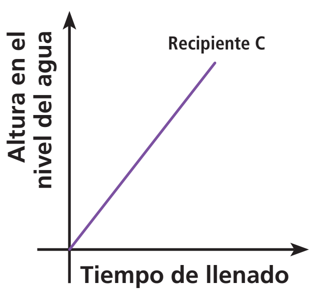
c) ¿Qué parte del recipiente C tarda más tiempo en llenarse, el nivel 2 o el nivel 3?

____

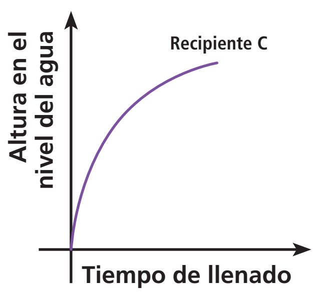
d) Pon una ✓ a la afirmación que describe correctamente la altura en el nivel del agua conforme transcurre el tiempo para el recipiente C. Recuerda que la cantidad de agua que ingresa en el recipiente cada segundo es constante.

- ☐ El nivel 1 (de 0 m a 1 m) se llena en el mismo tiempo que el nivel 2 (de 1 m a 2 m) porque ambas partes tienen 1 m de altura.
- ☐ La altura en el nivel del agua aumenta de manera constante porque ingresa la misma cantidad de agua cada segundo.
- ☐ El nivel 1 se llena mas rapido que el nivel 2 porque el volumen del nivel 2 es mayor que el del nivel 1, lo mismo sucede con el nivel 2 y el nivel 3.

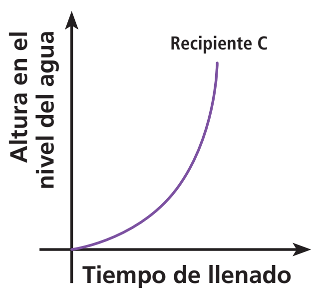
e) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde al llenado del recipiente C? Pon una ✓ a la que elijas.



☐



☐



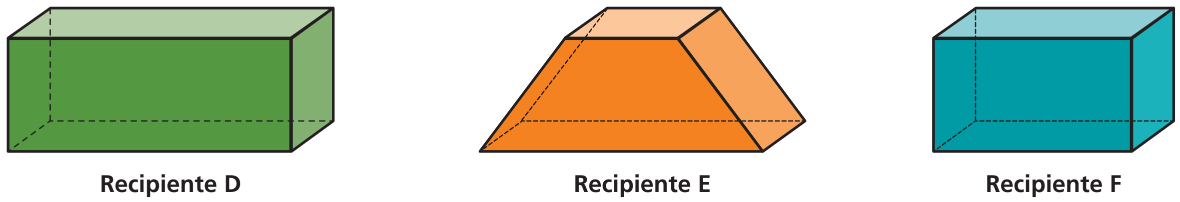
☐

Comparen sus respuestas y comenten:

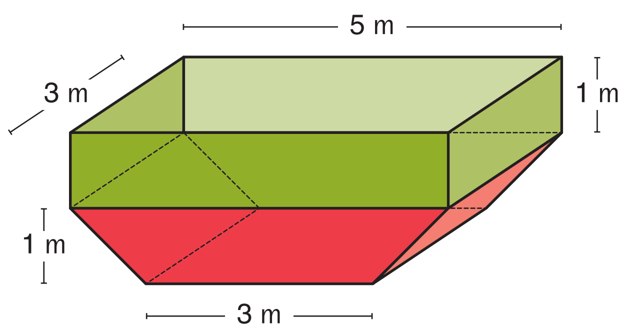
a) ¿Cuál de las gráficas anteriores corresponde a la siguiente afirmación?

Al principio el nivel del agua aumenta más lentamente y luego más rápido porque, a mayor altura, se necesita menor volumen de agua para llenar el recipiente.

b) ¿Cuál de los siguientes recipientes corresponde a la afirmación anterior?



III. Contesta las preguntas que se hacen sobre el llenado del siguiente recipiente.



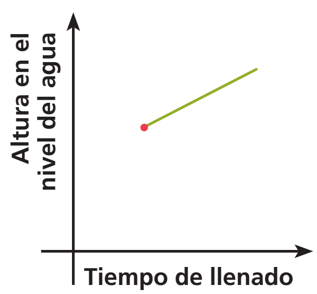
a) ¿A qué parte del recipiente le cabe más agua, a la parte roja o a la parte verde?

____

b) Completa la siguiente descripción sobre la variación del nivel de agua respecto al tiempo de llenado del recipiente anterior.

En la parte __________ (roja/verde), *el nivel de agua aumenta* ____________ (más rápido/más despacio) *al principio y, luego, aumenta* ____________ (más rápido/más despacio). *En la parte* __________ (roja/verde), *el nivel del agua aumenta de manera constante.*

c) En el siguiente plano se trazó la gráfica correspondiente a la parte verde del recipiente. Completa la gráfica del llenado del recipiente con lo correspondiente a la parte roja.



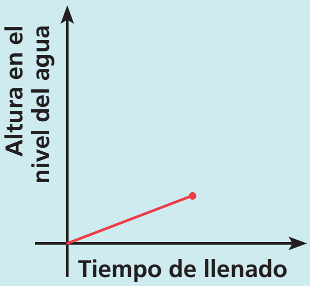
Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

>>> A lo que llegamos

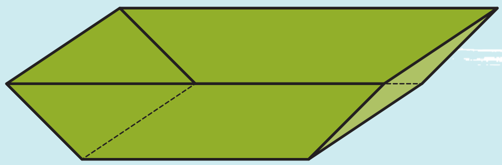
Con frecuencia encontramos situaciones en las que la gráfica asociada a dos cantidades que varían una respecto de la otra resulta ser la unión de dos o más segmentos de líneas rectas o curvas.

Para este recipiente

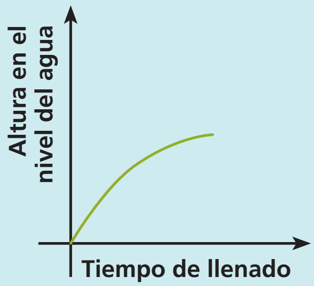
la gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto del tiempo es:



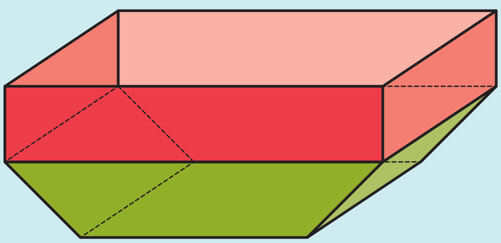
Para este recipiente



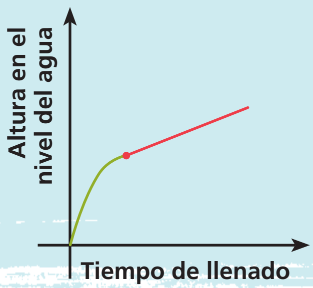
la gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto del tiempo es:



Y para el recipiente formado con la unión de los recipientes rojo y verde



la gráfica que representa el aumento del nivel del agua respecto del tiempo es la unión de las gráficas correspondientes a cada una de las partes:



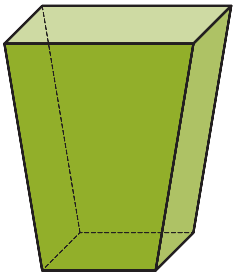
DIVERSOS PROBLEMAS

SESIÓN 2

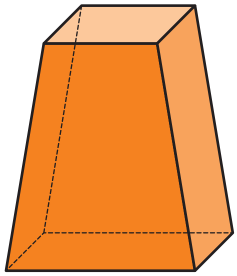
>>> Lo que aprendimos

Para conocer más acerca de cómo elaborar gráficas formadas por segmentos de líneas rectas y curvas, pueden ver el programa *Llenado de recipientes*.

1. Para los siguientes recipientes contesta:

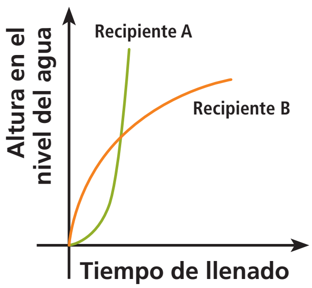


Recipiente A

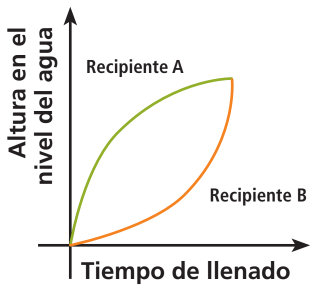


Recipiente B

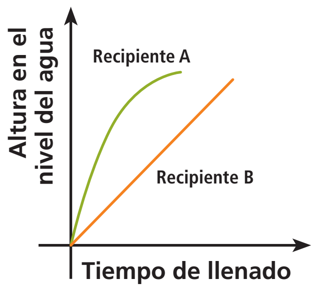
a) ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde al llenado de los recipientes? Pon una ✓ a la que elijas.



☐

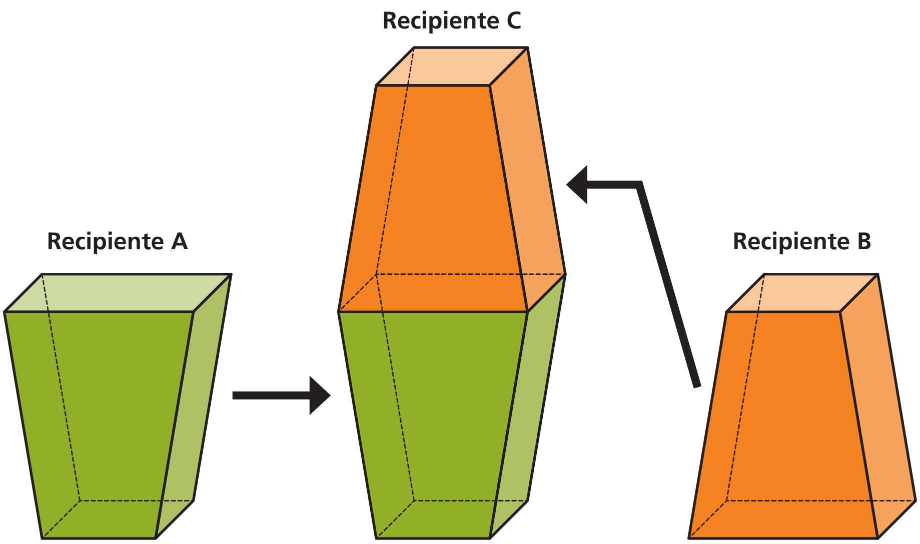


☐

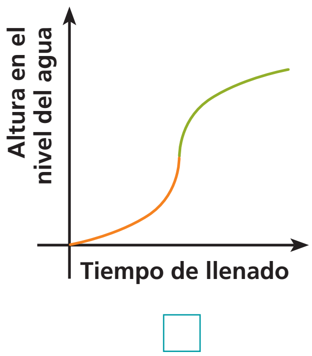


☐

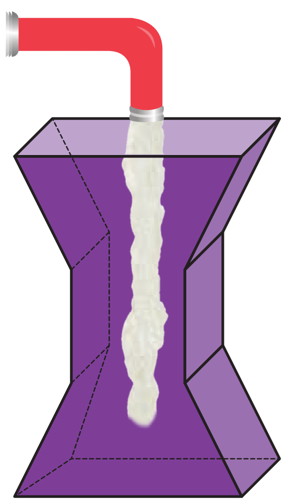
Observa que uniendo los recipientes A y B se obtiene un tercer recipiente que llamaremos recipiente C.



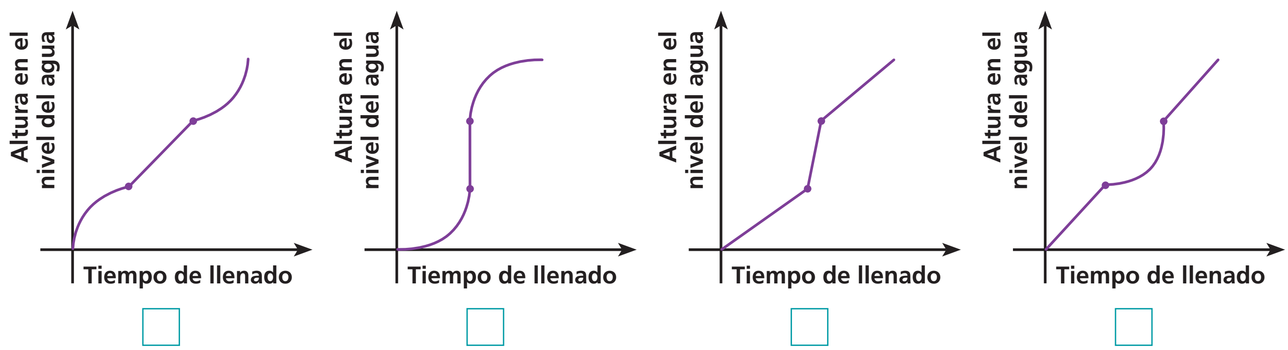
b) ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde al llenado del recipiente C? Pon una ✓ a la que elijas.



2. Se abre una llave para llenar de agua un recipiente como el del dibujo, y la cantidad de agua que cae por minuto en el recipiente es la misma cada minuto.

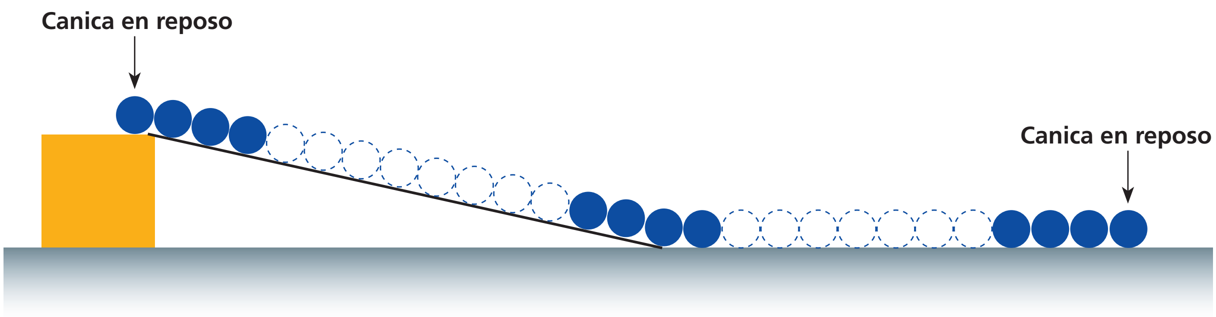


De las siguientes gráficas, ¿cuál representa la variación de la altura del nivel de agua que tiene el recipiente respecto del tiempo transcurrido? Pon una ✓ a la que elijas.

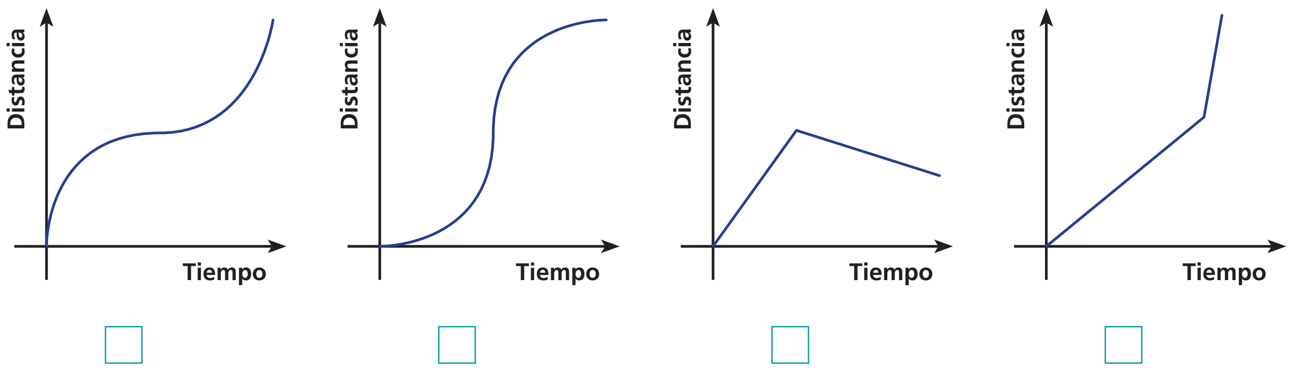


3. En la secuencia 18 de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste que la gráfica que modela el movimiento de una canica en el plano inclinado es un segmento de parábola.

Una canica se deja caer por un plano inclinado. Interesa describir su movimiento empezando en el momento en que la canica está en reposo en la parte más alta del plano, continuando cuando baja por el plano, luego cuando se mueve en el piso y hasta que queda en reposo:



¿Cuál de las siguientes gráficas representa la variación de la distancia recorrida por la canica con respecto al tiempo? Pon una ✓ a la que elijas.



En la gráfica que elegiste localiza los siguientes puntos y partes del recorrido:

a. El punto en el que la canica está en reposo.

b. La parte en la que la canica baja por el plano.

c. La parte en la que la canica se mueve en el piso.

d. El punto en el cual la canica se detiene.

Contesta:

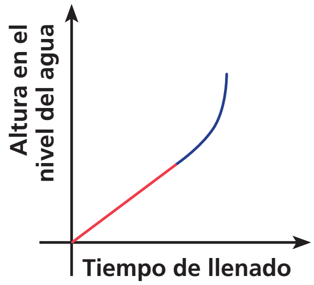
¿En qué momento la canica tiene mayor velocidad?

☐ Al inicio.

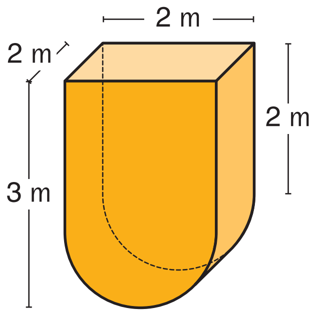
☐ Cuando termina de bajar por el plano.

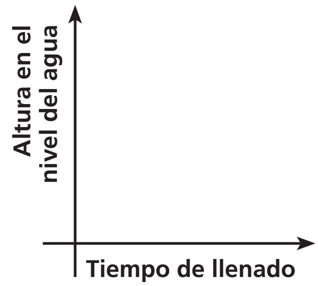
☐ Cuando está moviéndose en el piso.

4. En tu cuaderno construye un recipiente cuya gráfica de llenado sea la siguiente:

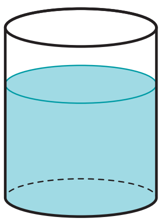


5. Para el siguiente recipiente, construye en el plano cartesiano un bosquejo de la gráfica de su llenado.



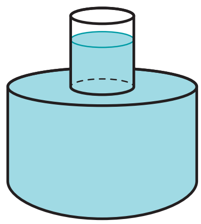


6. Las siguientes gráficas representan la variación de la altura en el nivel de agua que tiene cada recipiente respecto del tiempo transcurrido. Asocia cada uno de los tres recipientes con su respectiva gráfica.



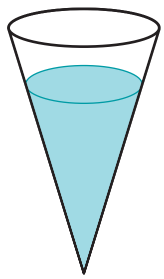
Recipiente A

Gráfica ___________



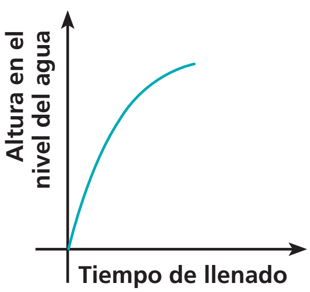
Recipiente B

Gráfica ___________

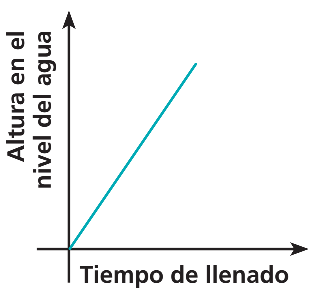


Recipiente C

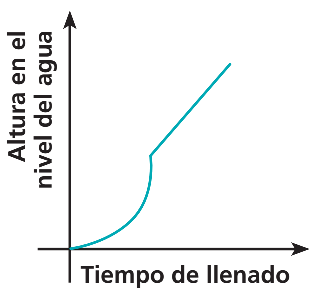
Gráfica ___________



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

>>> Para saber más

Sobre la gráfica de una función no lineal, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Interpretacion_graficas/Indice_graficas.htm
Ruta: Índice $\longrightarrow$ funciones no lineales
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.


1
6
15
a^2+b^2

BLOQUE 4

SECUENCIA 21

Diferencias en sucesiones

En esta secuencia aprenderás a encontrar una expresión algebraica cuadrática para calcular cualquier término en sucesiones numéricas y figurativas mediante el método de diferencias.

SESIÓN 1

NÚMEROS FIGURADOS

>>> Para empezar

En la secuencia 18 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste a encontrar la expresión algebraica que corresponde a una sucesión a partir de la diferencia entre dos términos consecutivos.

Completa la tabla.

Recuerda que:

Las diferencias se encuentran restando a un término el término anterior de la sucesión.

Sucesión	Diferencia	Expresión general
2, 4, 6, 8, 10, … $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$	2	$2n$
3, 5, 7, 9, 11, … $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$	2	
2, 7, 12, 17, 22, … $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{5}$ $\boxed{5}$		
2, 5, 8, 11, 14, … $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$		
5, 2, −1, −4, −7, … $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$		

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente sucesión de figuras corresponde a los llamados ***números rectangulares***.

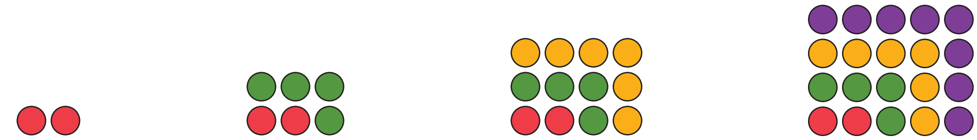


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

El ***n*–ésimo número rectangular** es el número de puntos que tiene el ***n*–ésimo** rectángulo de esta sucesión.

a) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 5? ____________

b) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 10? ____________

c) ¿Cuántos puntos tendrá la figura n? ____________

>>> Manos a la obra

I. Observen la sucesión de figuras y completen la tabla.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6	n
Número de renglones que tiene la figura	1	2					
Número de puntos en cada renglón de la figura	2	3					
Total de puntos de la figura (número rectangular)	2	6	12	20			

a) Escriban una regla para obtener el total de puntos de la figura de la sucesión que está en el lugar n ____

b) ¿Cuántos puntos tiene la figura 100? ____________

c) ¿Cuál es el número de la figura que tiene 420 puntos? ____________

Comparen sus soluciones y comenten:

¿Es cuadrática o lineal la expresión algebraica que corresponde al total de puntos de la figura n? Justifiquen su respuesta.

II. Al calcular las **diferencias** de los términos de una sucesión descrita por una expresión cuadrática se encuentran regularidades importantes. Contesten lo que se les pide a continuación.

a) Completen la tabla para después calcular las **diferencias** entre los términos de la sucesión de números rectangulares.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Número rectangular	2	6	12	20		

Diferencias de nivel 1 $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Como pueden observar las diferencias de nivel 1 forman una nueva sucesión. El primer término de esta sucesión es **4**, el segundo término es **6**, etcétera.

b) ¿Cuál es el sexto término de esta sucesión? ____________

Comparen sus soluciones e identifiquen los puntos que se agregaron al pasar de una figura a la siguiente.

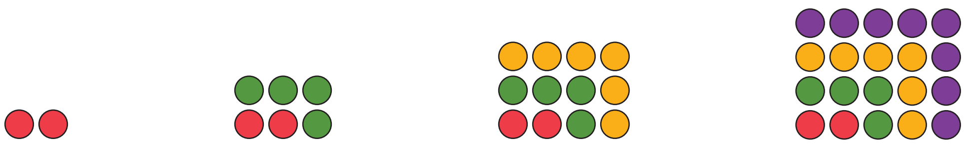


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

a) ¿De qué color son los puntos que se agregaron a la figura 1 para obtener la figura 2?

________________________ ¿Cuántos son? __________________

b) ¿Cuántos puntos y de qué color se agregaron a la figura 2 para obtener la figura 3?

____

c) ¿Cuántos puntos y de qué color se agregaron a la figura 3 para obtener la figura 4?

____

d) ¿Cuántos puntos se agregarían a la figura 4 para obtener la quinta figura?

____

III. A las diferencias entre los términos de las diferencias de nivel 1 se les llama ***diferencias de nivel 2***.

a) Completen la siguiente tabla para calcular las diferencias de nivel 2.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Número rectangular	2	6	12	20		

Diferencias de nivel 1 4 6 ___ ___ ___

Diferencias de nivel 2 ___ ___ ___ ___

b) Todas las diferencias del nivel 2 son iguales a un número. ¿De qué número se trata? ____________

c) ¿Cuántos puntos más tendrá la figura 7 que la figura 6? ____________

d) ¿Cuántos puntos en total tendrá la figura 7? ____________

Comparen sus soluciones.

IV. Consideren ahora la siguiente sucesión de figuras.

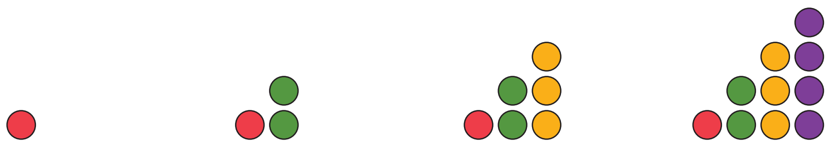


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

La sucesión del número de puntos que tiene cada triángulo es llamada ***sucesión de números triangulares***: 1, 3, 6, 10, …

Contesten lo que se pide para encontrar una expresión algebraica general para la sucesión de números triangulares.

a) Una de las siguientes afirmaciones describe correctamente a la sucesión de números triangulares. Subráyenla.

- La sucesión de los números triangulares aumentan de dos en dos.
- Cualquier número triangular es la mitad del número rectangular que ocupa el mismo lugar en su respectiva sucesión.
- El número triangular que está en el lugar n se obtiene con la fórmula n^2.

b) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite calcular el número de puntos que tiene el triángulo que está en el lugar n? Subráyenla.

- $n + 2$
- $\frac{(n + 1)n}{2}$
- n^2

c) Completen la siguiente tabla con los números triangulares y las diferencias.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Número triangular	1	3	6	10		

Diferencias

Nivel 1	2	3					
Nivel 2		1					

d) ¿Cómo se comparan las diferencias de nivel 2? ______________________

¿Por qué creen que suceda esto? ______________________

____

____

Comparen sus soluciones y comenten:

a) ¿A la sucesión de los números triangulares le corresponde una expresión general lineal o cuadrática?

b) ¿Qué expresión le corresponde a la sucesión de las diferencias de nivel 1?

>>> A lo que llegamos

Cuando la expresión general que corresponde a una sucesión es cuadrática, se encuentran las siguientes regularidades:

- Las **diferencias de nivel 1** son diferentes entre sí.
- Las **diferencias de nivel 2** son iguales a una constante diferente de cero.

Para analizar más ejemplos de sucesiones de figuras y la expresión asociada, pueden ver el programa *Sucesiones de figuras y expresiones cuadráticas*.

>>> Lo que aprendimos

Considera la sucesión de los números cuadrados 1, 4, 9, 16, 25, …

Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

a) ¿Cuál es la expresión general que permite encontrar el número de puntos de la figura que ocupa el lugar ***n*** en la sucesión de números cuadrados? ______________

b) Completen la tabla y las diferencias.

Número de la figura	1	2	3	4	5
Número cuadrado	1	4	9	16	

Diferencias
- Nivel 1: $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
- Nivel 2: $\boxed{2}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

c) ¿Cuál es la constante que aparece en las diferencias del nivel 2? _______________ ,

¿es igual o diferente de cero? ______________________________

LAS DIFERENCIAS EN EXPRESIONES CUADRÁTICAS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En la sesión 1 estudiaron algunas sucesiones en las que las diferencias de nivel 2 eran una constante diferente de cero. ¿Sucederá esto siempre?

>>> Manos a la obra

I. Las **diferencias** pueden ayudar a determinar muchas características importantes de las sucesiones numéricas, dependiendo del tipo de las expresiones algebraicas que les corresponden: lineales, cuadráticas o cúbicas.

Para explorar lo anterior completen y analicen la tabla siguiente:

Expresión general del término enésimo	Sucesión original y sus diferencias
$2n - 1$	1, 3, 5, 7, 9, … 2 2 2 2 $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
$-3n + 10$	7, $\boxed{}$, 1, –2, –5, … $\boxed{}$ –3 $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
$n^2 - n$	0, 2, 6, 12, 20, … 2 4 6 8 $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Expresión general del término enésimo	Sucesión original y sus diferencias
n^3	1, $\boxed{}$, 27, $\boxed{}$, 125, … 7 19 37 61 $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
$-2n^2 + 5$	3, $\boxed{}$, −13, −27, −45, … $\boxed{}$ −10 $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

En los siguientes incisos, escribe en qué nivel de las diferencias aparece una constante diferente de cero:

a) cuando la expresión general del término enésimo es lineal. ______________

b) cuando la expresión general del término enésimo es cuadrática. ______________

c) cuando la expresión general del término enésimo es cúbica. ______________

Comparen sus respuestas.

II. Completen las siguientes tablas de acuerdo con la expresión general del enésimo término.

a) Expresión general: $3n^2 + 2$

Lugar	1	2	3	4
Término	5	14	29	

Diferencias
- **Nivel 1**: $\boxed{9}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
- **Nivel 2**: $\boxed{}$ $\boxed{}$

b) Expresión general: $3n^2 + n$

Lugar	1	2	3	4
Término	4	14	30	

Diferencias
- **Nivel 1**: $\boxed{10}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
- **Nivel 2**: $\boxed{}$ $\boxed{}$

c) Expresión general: $-2n^2$

Lugar	1	2	3	4
Término	–2	–8	–18	

Diferencias
- **Nivel 1**: $\boxed{-6}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
- **Nivel 2**: $\boxed{}$ $\boxed{}$

d) Expresión general: $-2n^2 + 4$

Lugar	1	2	3	4
Término	2	–4	–14	

Diferencias
- **Nivel 1**: $\boxed{-6}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$
- **Nivel 2**: $\boxed{}$ $\boxed{}$

a) ¿Para cuáles expresiones generales la constante en las diferencias es 6?

____

b) ¿Qué constante apareció en los casos donde las expresiones generales son $-2n^2$ así como $-2n^2 + 4$? __________

III. Encuentren las diferencias de cada una de las siguientes sucesiones numéricas.

	4, 16, 36, 64, …	2, 14, 34, 62, …	5, 17, 37, 65, …
Nivel 1	12, __, __	12, __, __	12, __, __
Nivel 2	__, __	__, __	__, __

Completen la tabla siguiente.

Sucesión	Constante de las diferencias (diferente de cero)	Nivel donde aparece	Expresión general del enésimo término
4, 16, 36, 64, …			$4n^2$
2, 14, 34, 62, …			
5, 17, 37, 65, …			

Comparen sus respuestas y compartan los procedimientos que usaron para encontrar las expresiones generales.

>>> A lo que llegamos

Al obtener las diferencias de una sucesión numérica, en general sucede que:

- **Si en el nivel 2 de las diferencias aparece una constante diferente de cero, la expresión general es cuadrática.**
- **Cuando la expresión general de la secuencia es cuadrática, la constante que aparece en el nivel 2 de las diferencias es el doble del coeficiente del término cuadrático de la expresión.**

A partir de la información anterior, contesten:

a) ¿Qué valor tendrá la constante de las diferencias de nivel 2 cuando la expresión general del término enésimo es $3n^2$? _______________

b) ¿Qué valor tendrá la constante de las diferencias de nivel 2 cuando la expresión general del término enésimo es $1.5n^2 + 2$? _______________

SESIÓN 3

EL MÉTODO DE DIFERENCIAS

>>> Para empezar

No siempre es fácil determinar la expresión general cuadrática de una sucesión, sin embargo, existe un método que ayuda a obtenerla: ***el método de diferencias***.

En esta sesión aprenderán a usarlo.

>>> Consideremos lo siguiente

Dada la sucesión: 4, 9, 18, 31, …,

Si la sucesión continúa:

a) ¿Qué término ocupará el lugar 10? __________

b) ¿Qué término ocupa el lugar 20? __________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica general del término enésimo de esta sucesión?

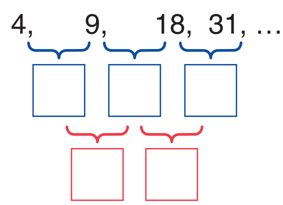
____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Obtengan las diferencias de los niveles 1 y 2. Verifiquen si en el nivel 2 de las diferencias aparece una constante diferente de cero.

a) Completen el siguiente esquema.



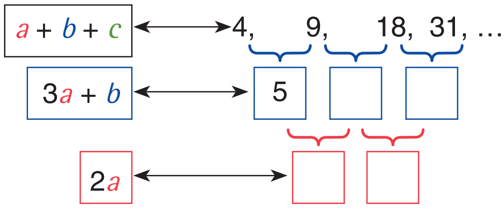
Como las diferencias de nivel 2 son una constante distinta de cero, la expresión algebraica general del término enésimo de la sucesión es cuadrática: $a\boldsymbol{n}^2 + b\boldsymbol{n} + c$, donde $\boldsymbol{n}$ representa el lugar del término. Para determinar los coeficientes a, b, c de esta expresión se puede usar el método de las diferencias.

Método de diferencias

Para determinar los coeficientes de la expresión $an^2 + bn + c$, hay que resolver las ecuaciones que se obtienen al considerar que:

- **El doble del coeficiente a es igual a la constante de las diferencias de nivel 2.**
- **La suma $3a + b$ es igual al primer término de las diferencias de nivel 1.**
- **La suma $a + b + c$ es igual al primer término de la sucesión.**

Del esquema pueden obtenerse varias ecuaciones que al resolverse permiten obtener los valores de los coeficientes a, b, c.



b) Completen el esquema y resuelvan las ecuaciones que se obtienen al aplicar el método de las diferencias a esta sucesión.

$2a = \boxed{}$ $\qquad$ $3a + b = \boxed{5}$ $\qquad$ $a + b + c = \boxed{4}$

$a =$ ____________

$b =$ ____________

$c =$ ____________

c) Sustituyan los valores de a, b, c en la expresión $an^2 + bn + c$ y simplifiquen eliminando los paréntesis.

$an^2 + bn + c = (\quad)n^2 + (\quad)n + (\quad) =$ ______________________

d) Verifiquen si la expresión general cuadrática que obtuvieron funciona para los cuatro primeros términos de la sucesión 4, 9, 18, 31, …

Primer término $n = 1$: $(\quad)1^2 + (\quad)1 + (\quad) =$ ______________________

Segundo término $n = 2$: $(\quad)2^2 + (\quad)2 + (\quad) =$ ______________________

Tercer término $n = 3$: ______________________________________

Cuarto término $n = 4$: ______________________________________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) El número 193 pertenece a esta sucesión, ¿en qué lugar está? ____________

b) ¿Pertenece 200 a esta sucesión? ____________ ¿Por qué? _________________________

II. Usando el método de diferencias, encuentren la expresión general de la sucesión 1, 3, 11, 25, ... y contesten lo que se les pide a continuación.

a) Encuentren las diferencias. Completen.

1, 3, 11, 25, …

Nivel 1 $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Nivel 2 $\boxed{}$ $\boxed{}$

b) Resuelvan las ecuaciones que se obtienen al aplicar el método de las diferencias a esta sucesión.

$2a = \boxed{}$ $\qquad 3a + b = \boxed{}$ $\qquad a + b + c = \boxed{}$

$a =$ ____________

$b =$ ____________

$c =$ ____________

c) Sustituyan por los valores de a, b, c en la expresión $a\boldsymbol{n}^2 + b\boldsymbol{n} + c$ y simplifiquen.

$a\boldsymbol{n}^2 + b\boldsymbol{n} + c = (\quad)\boldsymbol{n}^2 + (\quad)\boldsymbol{n} + (\quad) =$ ________________________

d) Verifiquen si la expresión general cuadrática que obtuvieron funciona para los primeros términos de la sucesión 1, 3, 11, 25, ….

Comparen sus respuestas y comenten.

a) El número 185 pertenece a esta sucesión, ¿en qué lugar está? ____________

b) ¿Pertenece 333 a esta sucesión? ____________ ¿Por qué? ______________________

Para saber cómo se obtienen las expresiones $2a$, $3a + b$ y $a + b + c$, observen el programa *El método de diferencias*.

APLIQUEMOS LO APRENDIDO

1. Observa la siguiente sucesión de figuras.

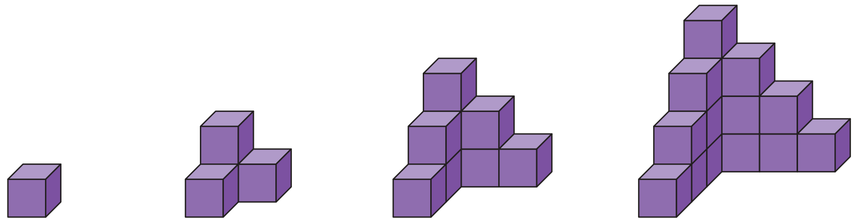


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

a) Dibuja la figura 5 de la sucesión anterior.

b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 100 de la sucesión? ____________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión? ____________________________

d) Si se sabe que una de las figuras que forman la sucesión tiene 2 704 cubos, ¿qué número corresponde a esa figura en la sucesión? ____________

2. Observa la siguiente sucesión de figuras.

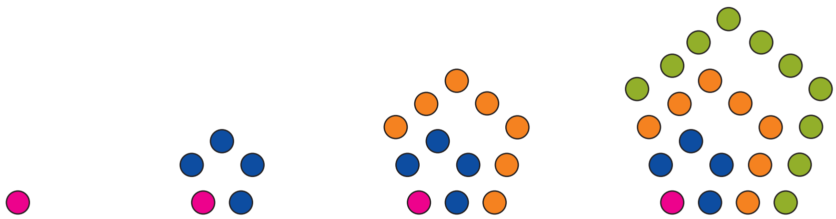


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

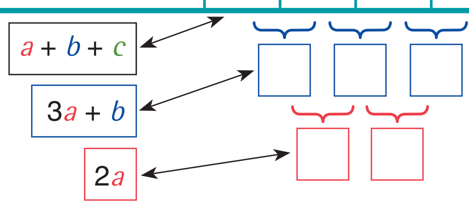
a) ¿Cuántos puntos se le agregaron a la figura 2 para formar la figura 3? _______

b) ¿Cuántos puntos se le agregaron a la figura 3 para formar la figura 4? _______

c) ¿Cuántos puntos se le agregarán a la figura 4 para formar la figura 5? _______

d) Encuentra la expresión general cuadrática de los números pentagonales mediante el método de diferencias.

Número de la figura	1	2	3	4
Números pentagonales	1	5	12	22



e) Plantea y resuelve las ecuaciones para encontrar los valores de *a*, *b*, *c*.

E_1: ______________ → *a* = ________

E_2: ____________________________ → *b* = ________

E_3: ____ → *c* = ________

La expresión general cuadrática que corresponde a la sucesión 1, 5, 12, 22, ... es

____

f) Verifica si la expresión general cuadrática que escribiste funciona para las cuatro primeras figuras de la sucesión.

Figura 1: ________________________________

Figura 2: ________________________________

Figura 3: ________________________________

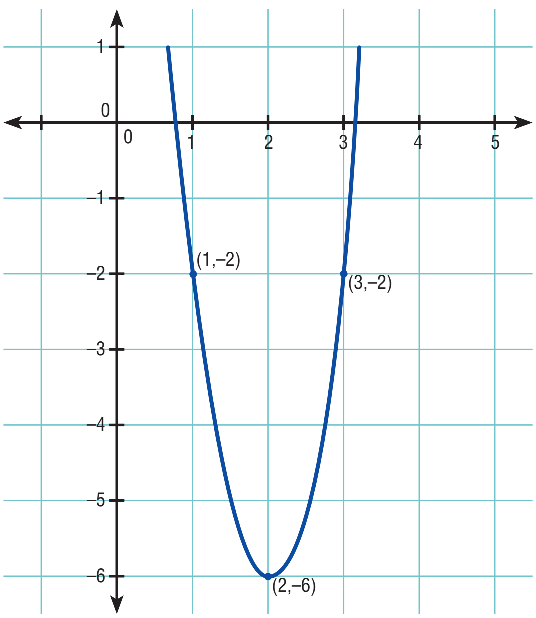
Figura 4: ________________________________

g) ¿Cuántos puntos tienen las figuras que ocupan los lugares 10 y 15?

Figura 10: ________________________________

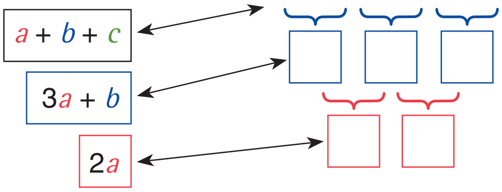
Figura 15: ________________________________

3. Usa el método de diferencias para encontrar la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que corresponde a la siguiente gráfica.



a) Puntos señalados en la gráfica: ____________________

Abscisa (x)	1	2	3
Ordenada (y)	–2	–6	–2



4. Resuelve las ecuaciones para encontrar los valores de a, b, c.

E_1: ____________ ⟶ a = ________

E_2: ________________________ ⟶ b = ________

E_3: ____________________________________ ⟶ c = ________

a) ¿Cuál es función cuadrática para calcular la ordenada si se conoce la abscisa?

$a\boldsymbol{x}^2 + b\boldsymbol{x} + c$ = ________________________

b) Verifica si funciona la expresión anterior para los puntos (1, –2), (2, –6) y (3, –2).

Para $\boldsymbol{x} = 1$: ____

Para $\boldsymbol{x} = 2$: ____

Para $\boldsymbol{x} = 3$: ____

c) ¿Cuál es la ordenada del punto de la gráfica que su abscisa es 5? ____________

Para $\boldsymbol{x} = 5$: ____

d) ¿Cuál es la abscisa del punto de la gráfica que su ordenada es 100? __________

____

Ecuación cuadrática: ____

____

>>> Para saber más

Sobre el método de diferencias finitas, consulta:
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Junta de Andalucía. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Teorema de Pitágoras

En esta secuencia, aplicarás el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas de cálculo de longitudes y distancias.

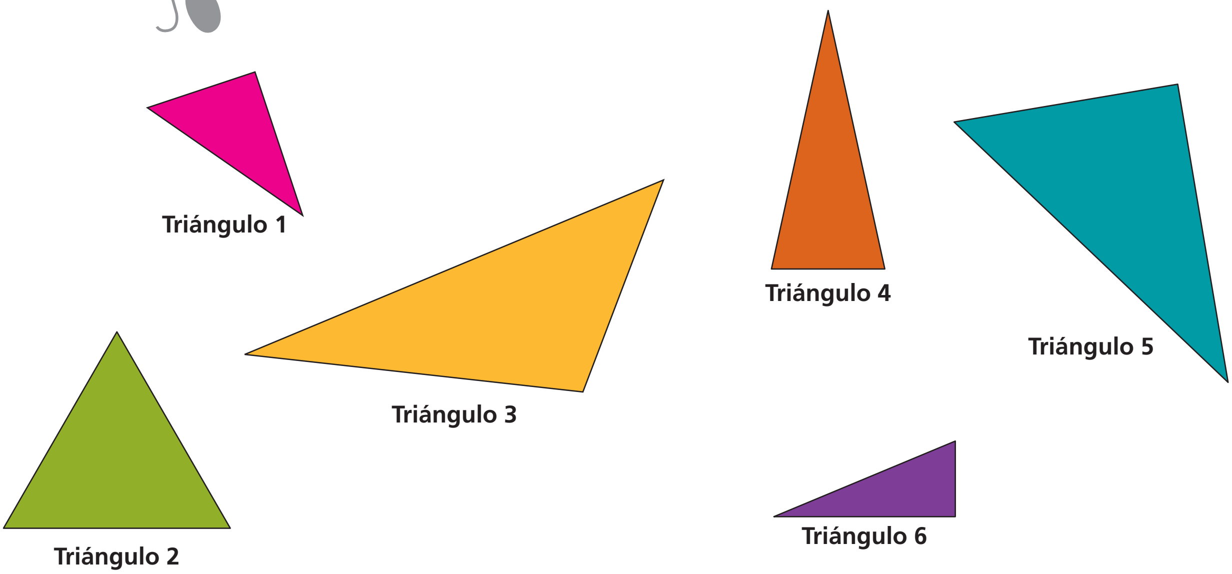
SESIÓN 1

¿QUÉ NOS DICE EL TEOREMA DE PITÁGORAS?

>>> Para empezar

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se conocen como ***catetos*** y el lado mayor, el cual se opone al ángulo recto, se llama ***hipotenusa***.

I. De los siguientes triángulos, distingan los que sean triángulos rectángulos.



a) Midan la longitud de los lados de cada triángulo rectángulo que encontraron y anoten las medidas (como ***a***, ***b***, ***c***,), en la siguiente tabla.

Triángulo rectángulo	Medidas de los lados		
	Catetos		Hipotenusa
	a	*b*	*c*

Tabla 1

b) Utilicen las medidas de los lados de cada triángulo para completar la siguiente tabla.

Triángulo rectángulo	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2

Tabla 2

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación ____________

____

____

Comparen sus respuestas y utilicen el conjunto anterior de triángulos.

a) En todo triángulo rectángulo hay un lado mayor que llamamos hipotenusa (***c***). ¿Hay algunos triángulos no rectángulos que sólo tengan un lado mayor? ____________

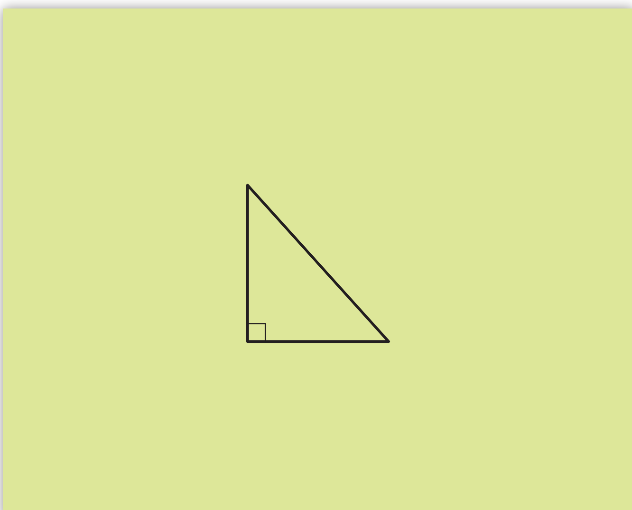
¿Cuáles son? ____

b) Consideren el triángulo 3, llamen ***c*** al lado mayor y ***a*** y ***b*** a los otros dos lados. Calculen a^2, b^2, c^2: ____

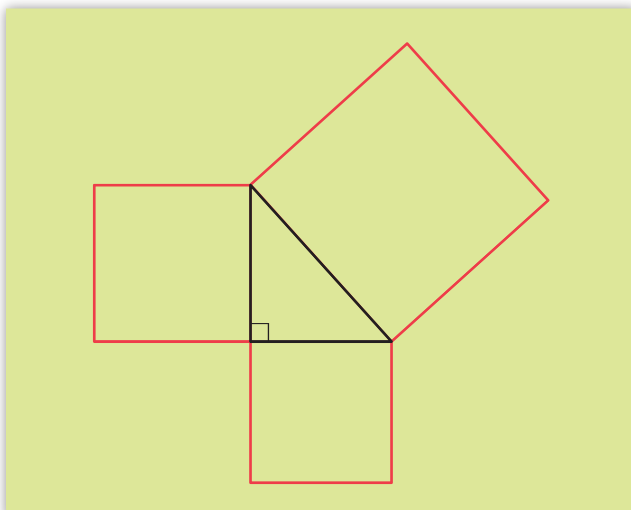
¿Se cumple la relación que encontraste en los triángulos rectángulos? ____________

II. En su cuaderno, realicen lo siguiente:

Paso 1. Construyan un triángulo rectángulo de cualquier medida.

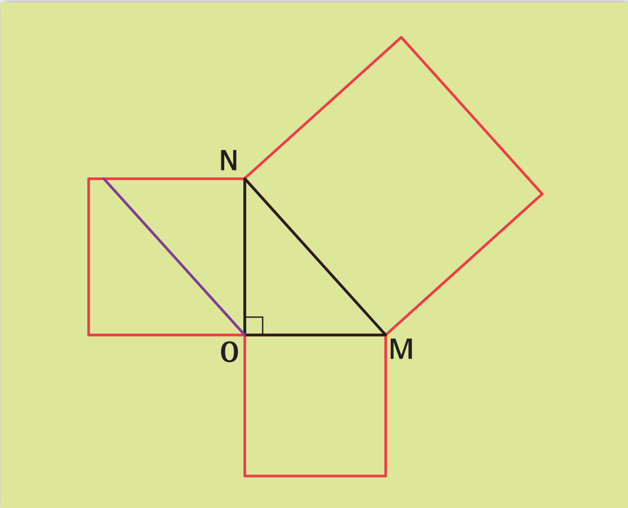


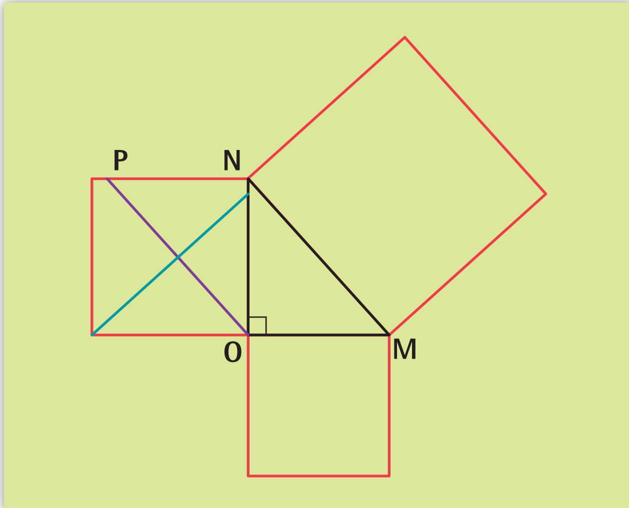
Paso 2. Ahora, construyan cuadrados a partir de la longitud de cada lado del triángulo.



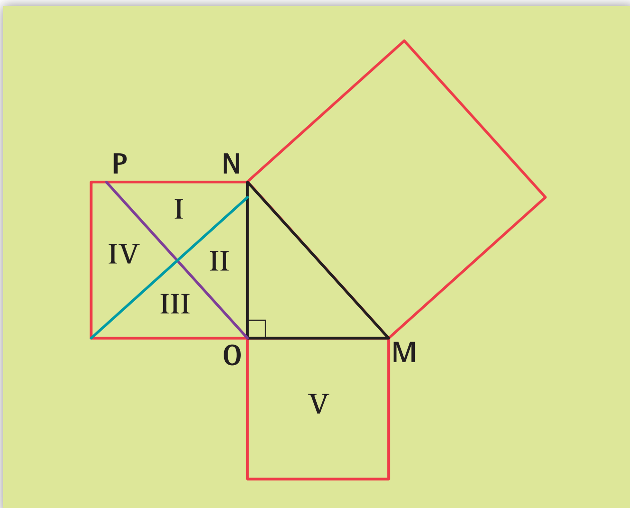
Paso 3. Identifiquen el cateto más grande y llámenlo **ON**. En el cuadrado construido sobre ese cateto tracen el segmento paralelo a la hipotenusa **MN** que pase por el extremo **O** del cateto.

Paso 4. Por el punto medio del segmento **OP** tracen una perpendicular, de manera que el cuadrado del cateto quede dividido en cuatro partes, como se indica en la figura.





Paso 5. Asignen los números **I**, **II**, **III** y **IV** a las cuatro partes. Además, asignen el número **V** al cuadrado construido sobre el cateto menor como se muestra en la siguiente figura. Comparen sus construcciones.



a) Recorten las piezas I, II, III, IV y V. Reacomódenlas, sin que se traslapen, dentro del cuadrado construido sobre la hipotenusa (**MN**). ¿Es posible recubrir este cuadrado con las cinco piezas? ____________

b) ¿Creen que en cualquier triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa? ____________ ¿Por qué? ____

____

>>> A lo que llegamos

En todo triángulo rectángulo, si *a* y *b* son las medidas de los catetos y *c* la medida de la hipotenusa se cumple que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

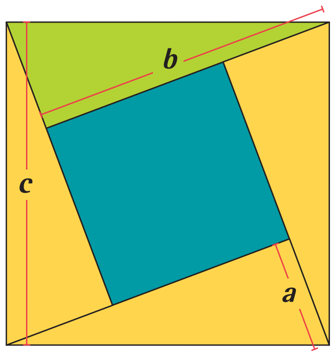
Es decir, el área del cuadrado de lado *c* (hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados del lado *a* y lado *b* (catetos).

A esta propiedad de los triángulos rectángulos se le llama el teorema de Pitágoras.

Para analizar más ejemplos con demostraciones de este teorema, pueden ver el programa *Algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras*.

>>> Lo que aprendimos

En tu cuaderno, construye cuatro triángulos rectángulos iguales entre sí y acomódalos como se indica en la figura (***a*** es la medida del cateto menor, ***b*** la del mayor y ***c*** la de la hipotenusa):



a) ¿El cuadrilátero que forman las hipotenusas de los cuatro triángulos rectángulos es un cuadrado? _________ . ¿Qué razones darías para asegurarlo? __________________

____

____

b) ¿El cuadrilátero que se forma en el interior de la figura es también un cuadrado? _________ . ¿Por qué? ____

¿Cuánto mide por lado ese cuadrado? __________________

c) ¿Cuál es la suma de las áreas de las cinco figuras que forman el cuadrado que tiene por lado a la hipotenusa ***c***? ______________________________

d) ¿Cómo podrían verificar que el área del cuadrado grande c^2 es igual a $a^2 + b^2$?

____

____

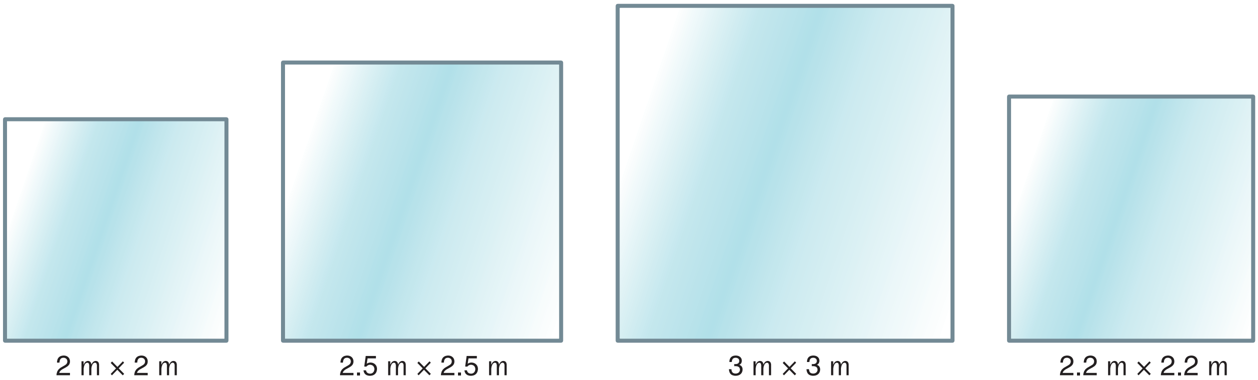
SESIÓN 2

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS I

>>> Lo que aprendimos

1. En una escuela se quiere adaptar un salón para las clases de danza. Se han comprado algunos espejos para el salón.

Las medidas de los espejos son:



Sin embargo, hay un inconveniente: la entrada del salón mide 2 m de alto y 1 m de ancho.

a) ¿Cuáles son los espejos que pueden pasar por esa entrada? ____________________

b) ¿Cómo lo pudieron determinar? ____

____

____

____

c) Si la medida del largo de los espejos que se compraron es de 2.5 m, ¿cuál es la medida máxima del ancho que puede tener un espejo para pasar por esa entrada? ____________________

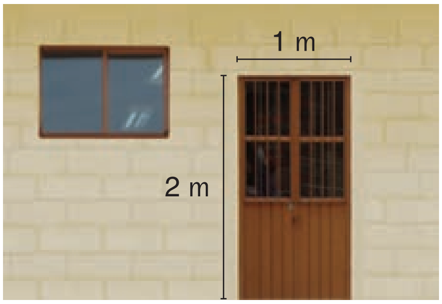
d) ¿De qué manera utilizarías el teorema de Pitágoras para resolver este problema?

____

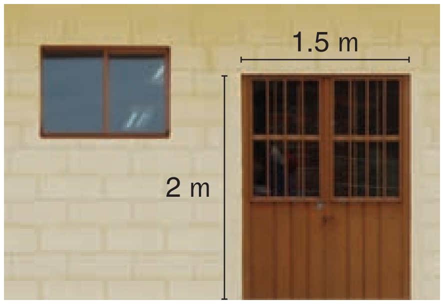
____

____

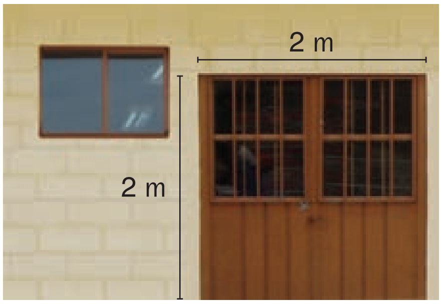
2. Se quiere colocar un espejo de 2.50 m × 2.50 m en uno de los salones de la escuela. Los salones tienen una única entrada con las siguientes dimensiones:



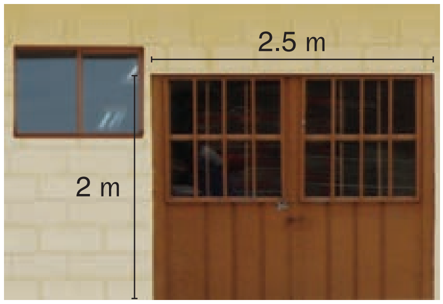
Salón A



Salón B



Salón C



Salón D

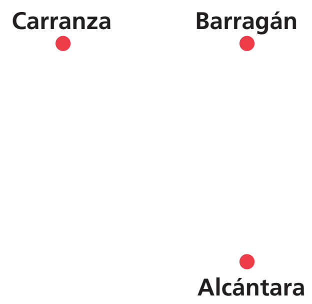
a) ¿En qué salones es posible que entre el espejo? ______________________

b) ¿Por qué? ______________________

c) En el siguiente recuadro, anota el procedimiento que seguiste para saber si es posible que pase el espejo por la entrada de cada salón.

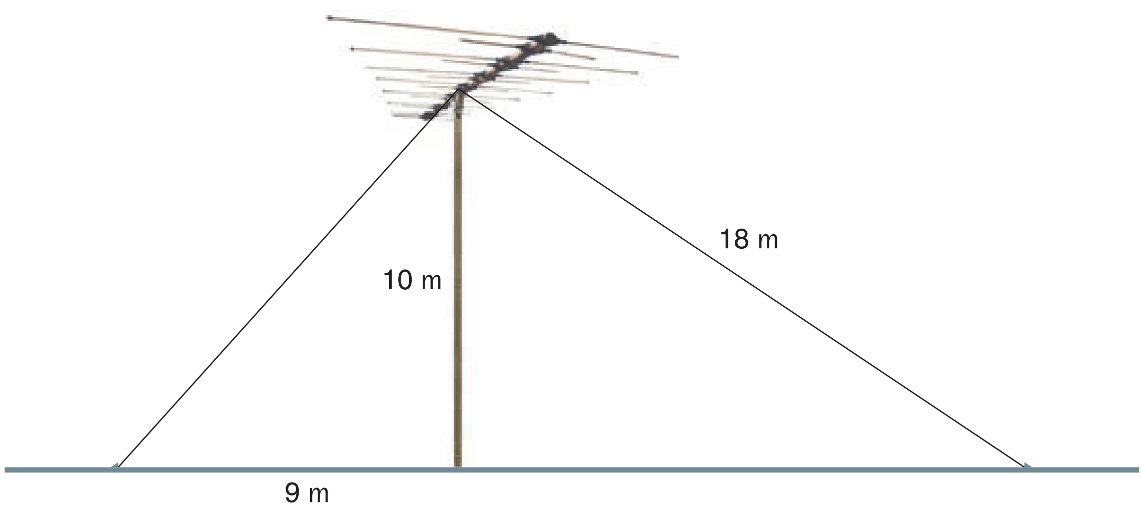
d) Comparen sus respuestas y encuentren una manera de calcular la medida mínima que debe tener la entrada del salón para que pase el espejo. Anótenla en su cuaderno.

3. Los siguientes puntos presentan la ubicación de tres poblados. Barragán está a 40 km al norte de Alcántara y Carranza está a 30 km al oeste de Barragán.



¿Cuál es la distancia entre los pueblos de Alcántara y Carranza? ________________

4. Una antena de TV mide 10 m de altura y está fijada con alambres, uno de los cuales mide 18 m.



a) ¿A qué distancia de la base de la antena queda fijo el alambre de 18 m sobre el piso, si se usa toda la longitud del alambre? ________________________

b) En la misma antena de TV, otro de los alambres está fijo al piso a una distancia de 9 m de la base. ¿Cuál es la longitud de ese alambre? ______________________

5. En el antiguo Egipto, cuando ocurrían desbordamientos del cauce del río Nilo, las inundaciones provocaban que se perdieran los límites entre los terrenos (o parcelas), los harpedonaptas (tendedores de cuerdas, agrimentores) tenían la tarea de reproducir gráficamente el área de las propiedades territoriales.

Para trazar perpendiculares sobre un terreno, utilizaban una cuerda dividida en 12 tramos por medio de 13 nudos equidistantes.

Formaban un triángulo cuyos lados fueran 3, 4 y 5 tramos. El triángulo era un triángulo rectángulo y que es llamado ***triángulo egipcio 3-4-5***.

Con una cuerda dividida en 30 tramos también se puede construir un triángulo rectángulo. ¿Cuántos tramos habrá entre los nudos de cada lado del triángulo que se forma? _______________ . Represéntenlo en en el siguiente recuadro.

Para analizar más aplicaciones del teorema de Pitágoras, pueden ver el programa *Aplicaciones del teorema de Pitágoras*.

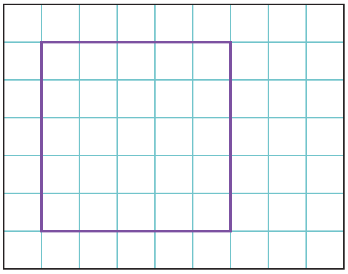
SESIÓN 3

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS II

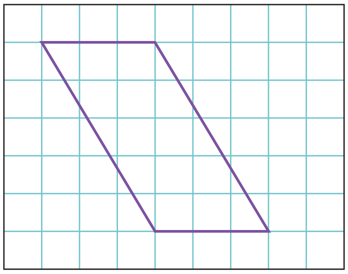
>>> Lo que aprendimos

1. Sin usar regla, encuentra el perímetro de los siguientes cuadriláteros. Anota en qué caso utilizaron el teorema de Pitágoras.

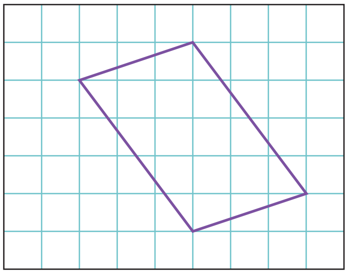
Cuadrilátero 1



Cuadrilátero 2



Cuadrilátero 3

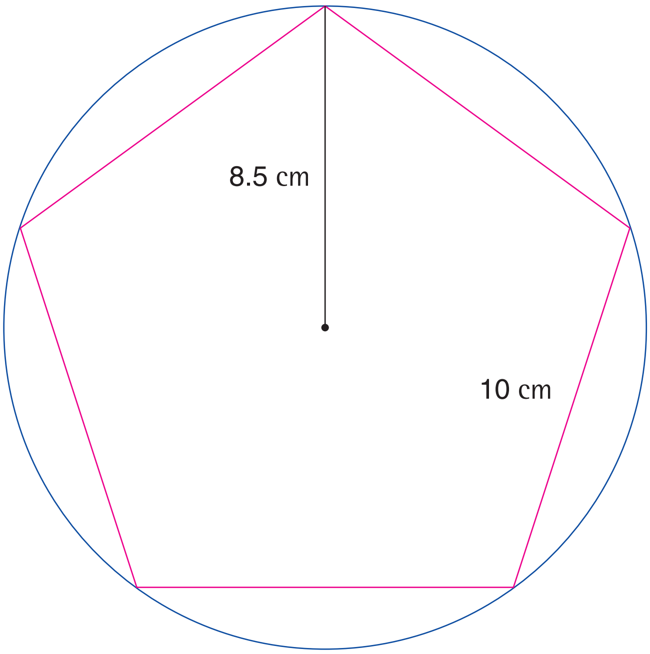


Perímetro ____________ **Perímetro** ____________ **Perímetro** ____________

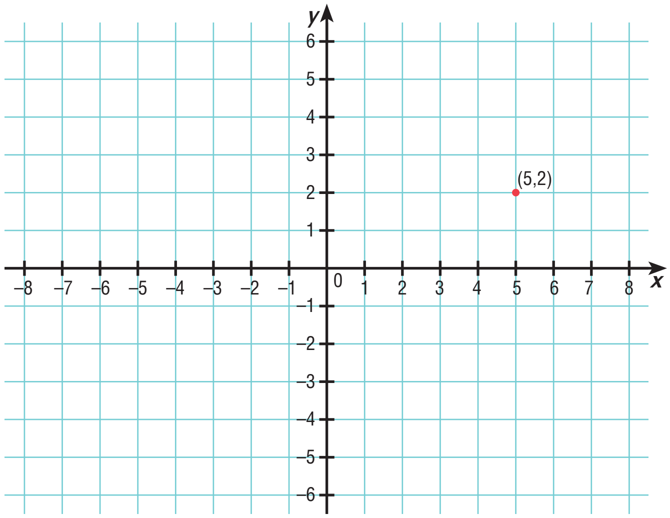
Teorema de Pitágoras ☐ **Teorema de Pitágoras** ☐ **Teorema de Pitágoras** ☐

Comparen sus procedimientos y respuestas.

2. Calcula el área de un pentágono regular cuyos lados miden 10 cm, y que está inscrito en una circunferencia de radio 8.5 cm.



3. ¿Cuál es la distancia del punto de coordenadas (5,2) al origen del plano cartesiano?



4. El tamaño de una pantalla de televisión se define como la longitud de la diagonal de la pantalla en pulgadas.

 a) Una pantalla de televisión mide 56" de ancho y 42" de alto, ¿qué longitud mide la diagonal de esta pantalla? ____________________

 b) Si la diagonal de la pantalla de una televisión mide 60", ¿cuánto puede medir de ancho y alto? (Escribe al menos dos diferentes medidas del ancho y largo que puede tener la pantalla de televisión) ______________________________

 c) ¿Cuánto pueden medir los lados de un televisor si su tamaño es de 20"? (Escribe al menos dos diferentes medidas del ancho y largo que puede tener la pantalla de televisión) ____________________

>>> Para saber más

Sobre otras demostraciones geométricas del teorema de Pitágoras, consulta:
http://roble.cnice.mecd.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm
[Fecha de consulta: 23 de abril de 2008].
Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Razones trigonométricas

En esta secuencia aprenderás a reconocer y determinar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

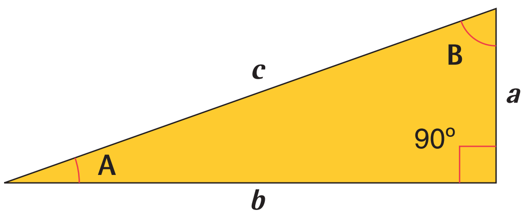
SESIÓN 1

LA COMPETENCIA

>>> Para empezar

En la secuencia 22 de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste a calcular la longitud de la hipotenusa o de los catetos usando el teorema de Pitágoras; en esta secuencia conocerás otras herramientas matemáticas para calcular el valor de los catetos o de la hipotenusa.

En un triángulo rectángulo, al lado opuesto al ángulo ***A*** se le llama ***cateto opuesto al ángulo A*** y al cateto que forma uno de los lados del ángulo se le llama ***cateto adyacente al ángulo A***. Mientras que al lado opuesto al ángulo ***B*** se le llama ***cateto opuesto al ángulo B*** y al cateto que forma uno de los lados del ángulo se le llama ***cateto adyacente al ángulo B***, tal como se muestra en la figura.



a = **Cateto opuesto al ángulo A**

a = **Cateto adyacente al ángulo B**

b = **Cateto adyacente al ángulo A**

b = **Cateto opuesto al ángulo B**

>>> Consideremos lo siguiente

En una competencia de motociclismo, los participantes hacen un recorrido por varias rampas y los jueces califican el desempeño de cada competidor; cada rampa tiene distinto grado de dificultad ya que unas están más inclinadas que otras; entre mayor sea el ángulo de inclinación de la rampa, mayor es el grado de dificultad que tiene el competidor al pasar por ella.

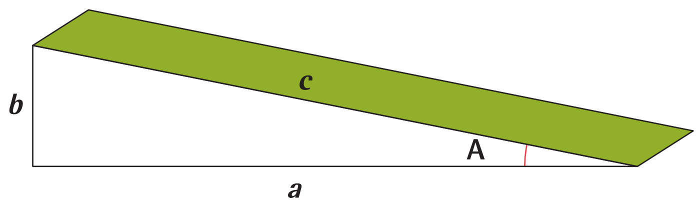


Figura 1

La siguiente tabla muestra las medidas de seis rampas como la de la figura 1.

	Rampa 1	Rampa 2	Rampa 3	Rampa 4	Rampa 5	Rampa 6
b	3	1.5	3	4.5	1.5	3
a	5	3.5	3.25	6	2.5	4

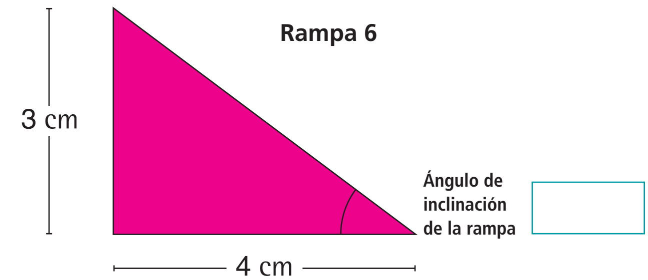
a) ¿Qué rampa tiene el mayor ángulo de inclinación (ángulo **A**)? ____________

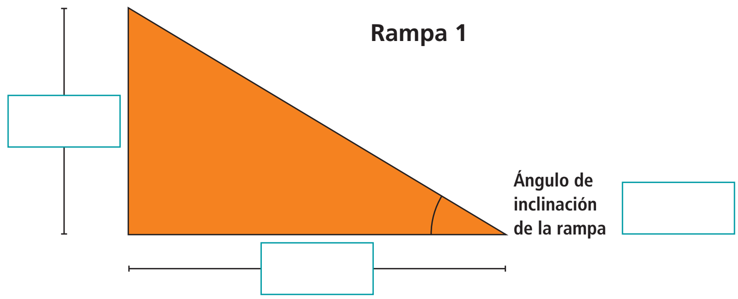
b) ¿Cuáles rampas tienen el mismo ángulo de inclinación? ____________ y ____________

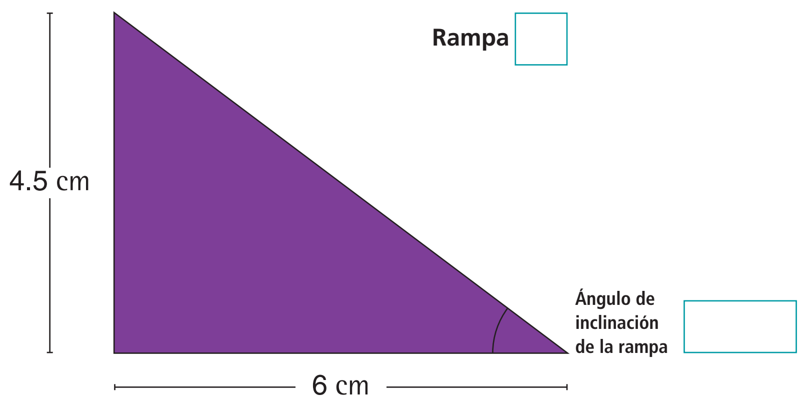
Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

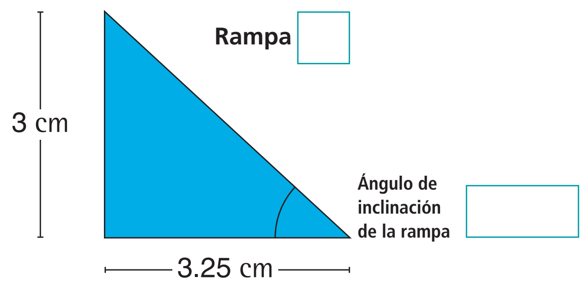
>>> Manos a la obra

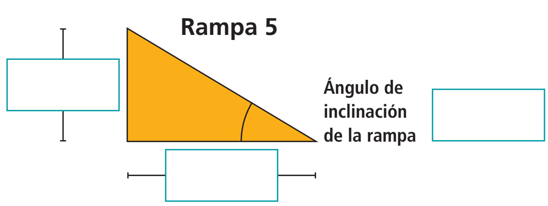
I. En los siguientes triángulos rectángulos están representadas las medidas de las rampas de la tabla anterior. Están hechos a escala de 1 cm a 1 m; usa tu regla y transportador para completar las medidas, el ángulo de inclinación y el número de rampa para cada uno de los triángulos.

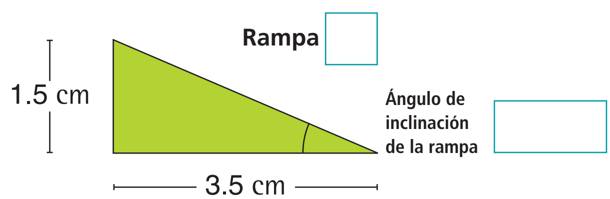












Completa la siguiente tabla:

	Cateto opuesto al ángulo de inclinación (b)	Cateto adyacente al ángulo de inclinación (a)	Cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente	Angulo de inclinación
Rampa 1	3	5		
Rampa 2	1.5	3.5		
Rampa 3	3	3.25		
Rampa 4	4.5	6		
Rampa 5	1.5	2.5		
Rampa 6	3	4		

Para la rampa 1 y la rampa 2 contesta:

- ¿Cuál rampa tiene un mayor ángulo de inclinación? ____________
- ¿En qué rampa el cociente calculado en la tabla anterior es mayor? ____________

Para la rampa 3 y la rampa 4 contesta:

- ¿Cuál rampa tiene un mayor ángulo de inclinación? ____________
- ¿En qué rampa el cociente calculado en la tabla anterior es mayor? ____________
- Si en una séptima rampa, el cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo de inclinación fuera mayor al de la rampa 4, ¿cómo sería el ángulo de inclinación, mayor o menor? Justifica tu respuesta. ____________________

  ____

Para la rampa 4 y la rampa 6 contesta:

- ¿Cuál rampa tiene un mayor ángulo de inclinación? ____________
- ¿Cómo es el cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo de inclinación, distinto o igual? ____________
- ¿Son semejantes los triángulos de la rampa 4 y la rampa 6? Justifica tu respuesta

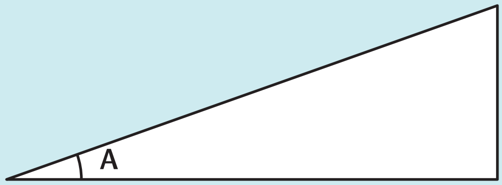
  ____

- Si en una octava rampa, el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente al ángulo de inclinación fuera igual al de la rampa 1, ¿cómo compararían los ángulos de inclinación? Justifica tu respuesta. ____________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron, además, en el apartado *Consideremos lo siguiente*, verifiquen lo contestado.

>>> A lo que llegamos

En un triángulo rectángulo como el de la figura, se llama **tangente** del ángulo A al cociente que se obtiene de dividir el cateto opuesto al ángulo A entre el cateto adyacente, y se escribe como **tan(A)**.



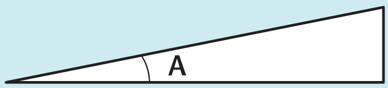
b = Cateto opuesto al ángulo A

a = Cateto adyacente al ángulo A

$$\tan(A) = \frac{b}{a}$$

Entre mayor es la tangente de un ángulo, mayor es el ángulo.

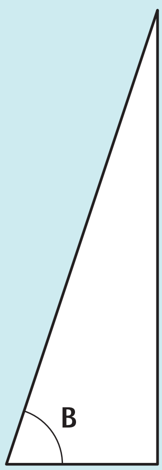
Por ejemplo:



Cateto opuesto al ángulo A = 1 cm

Cateto adyacente al angulo A = 5 cm

$$\tan(A) = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo A}}{\text{Cateto adyacente al ángulo A}} = \frac{1\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0.2$$



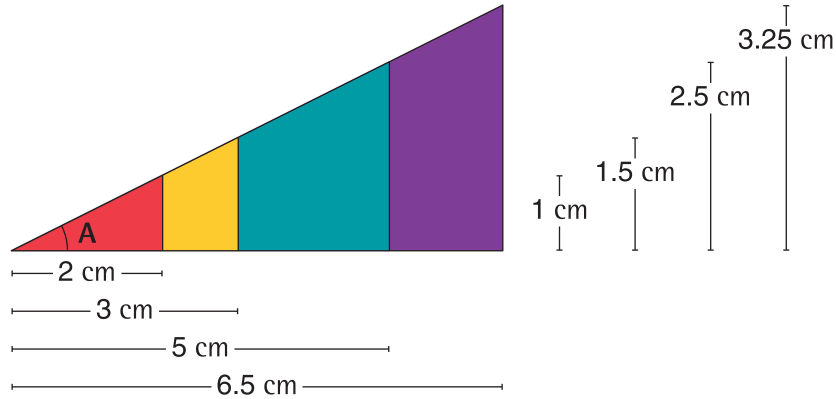
Cateto opuesto al ángulo B = 6 cm

Cateto adyacente al angulo B = 2 cm

$$\tan(B) = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo B}}{\text{Cateto adyacente al ángulo B}} = \frac{6\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 3$$

Como tan(B) es mayor que tan(A), entonces la medida del ángulo B es mayor que la del ángulo A.

II. En el siguiente dibujo se encuentran superpuestos cuatro triángulos rectángulos, observa que los cuatro comparten el ángulo **A**. Completa los datos de la tabla.



	Cateto opuesto al ángulo A	Cateto adyacente al ángulo A	Cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente
Triángulo rojo	1	2	$\frac{1}{2} = 0.5$
Triángulo amarillo	1.5	3	
Triángulo azul	2.5		
Triángulo morado		6.5	

a) ¿Cómo son los cocientes de la tabla anterior, distintos o iguales? ______________

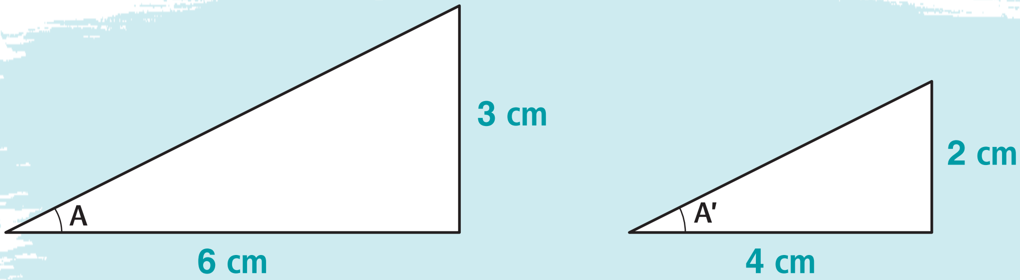
b) ¿Cuál de los siguientes criterios usarías para determinar que los triángulos anteriores son semejantes? Subráyalo.

- Tres ángulos iguales.
- Lados correspondientes proporcionales.
- Dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre ellos igual.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

Para dos triángulos rectángulos semejantes, el valor de la tangente de ángulos correspondientes es el mismo. Por ejemplo:



$\tan(A) = \frac{3}{6} = 0.5$ $\qquad$ $\tan(A') = \frac{2}{4} = 0.5$

Estos dos triángulos son semejantes y en ambos el valor de la tangente de los ángulos correspondientes A y A´ es 0.5

COSENOS Y SENOS

SESIÓN 2

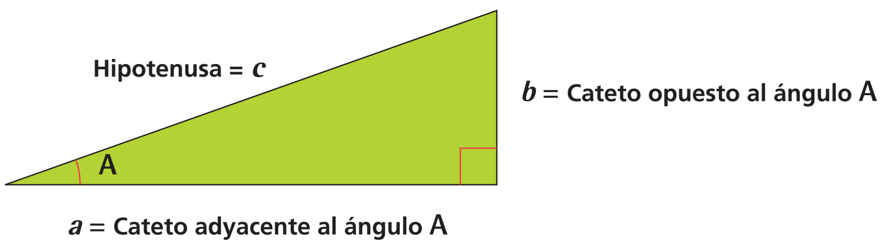
>>> Para empezar

Seno, coseno y tangente

En la sesión anterior aprendiste que, dado un ángulo **A** en un triángulo rectángulo, al cociente de dividir el cateto opuesto entre el cateto adyacente se le llama tangente del ángulo **A**. Existen otras relaciones entre los lados del triángulo y un ángulo **A**: la relación que hay entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa o la relación que hay entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa. Estas dos relaciones reciben los siguientes nombres:

Al cociente de dividir el cateto opuesto entre la hipotenusa se le llama ***seno de*** **A** y se escribe sen(**A**).

Al cociente de dividir el cateto adyacente entre la hipotenusa se le llama ***coseno de*** **A** y se escribe cos(**A**).



sen(A) $= \frac{b}{c}$

cos(A) $= \frac{a}{c}$

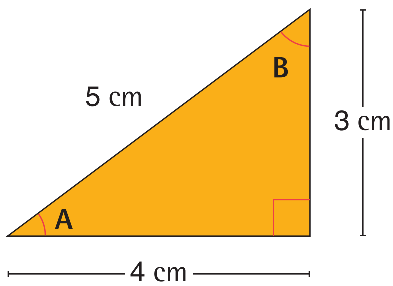
>>> Consideremos lo siguiente

El seno del ángulo **A** en el siguiente triángulo rectángulo es $\frac{3}{5}$.

Construye un triángulo rectángulo diferente del anterior cuyo seno de uno de sus ángulos sea también $\frac{3}{5}$; a ese ángulo llámale **A′**.

a) ¿Cuánto mide el ángulo del triángulo **A′** que construiste? __________

b) ¿Cuánto mide el ángulo **A**? __________



sen(**A**) $= \frac{3}{5}$

sen(**B**) $= \frac{4}{5}$

c) ¿Son semejantes el triángulo que construiste y el triángulo anterior? ____________

Justifica tu respuesta. ____

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. El seno del ángulo **B** en el triángulo del apartado *Consideremos lo siguiente* es $\frac{4}{5}$.

Recuerda que:

El teorema de Pitágoras dice que en todo triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

a) ¿Cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes a $\frac{4}{5}$? Subráyalas.

$\frac{2}{5}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{2}{2.5}$ $\frac{5}{3}$

b) Si la hipotenusa en un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de los catetos mide 8 cm, usando el teorema de Pitágoras ¿cuánto mide el otro cateto? ____________

c) En el siguiente espacio construye un triángulo rectángulo con las medidas del inciso b).

d) ¿Es semejante el triángulo que construiste al que está en el apartado *Consideremos lo siguiente*? ____________ . Justifica tu respuesta. ____________________

____

e) En el triángulo que construiste, nombra con la letra **C** al ángulo que corresponde al ángulo **B**, y completa la siguiente tabla:

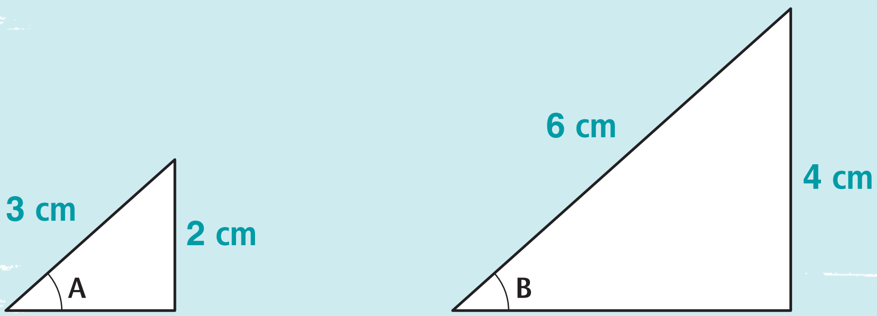
Ángulo	Seno del ángulo	Medida del ángulo
B	$\frac{4}{5} = 0.8$	
C		

f) ¿Cómo es la medida de los ángulos **B** y **C**, igual o diferente? ________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados.

>>> A lo que llegamos

Cuando el valor del seno para dos ángulos de triángulos rectángulos distintos (uno en cada triángulo) es el mismo entonces **los triángulos son semejantes**. Por ejemplo, el valor del seno del ángulo A y el del ángulo A' en los siguientes dos triángulos es $\frac{2}{3} = 0.6$, y por lo tanto los dos triángulos son semejantes.

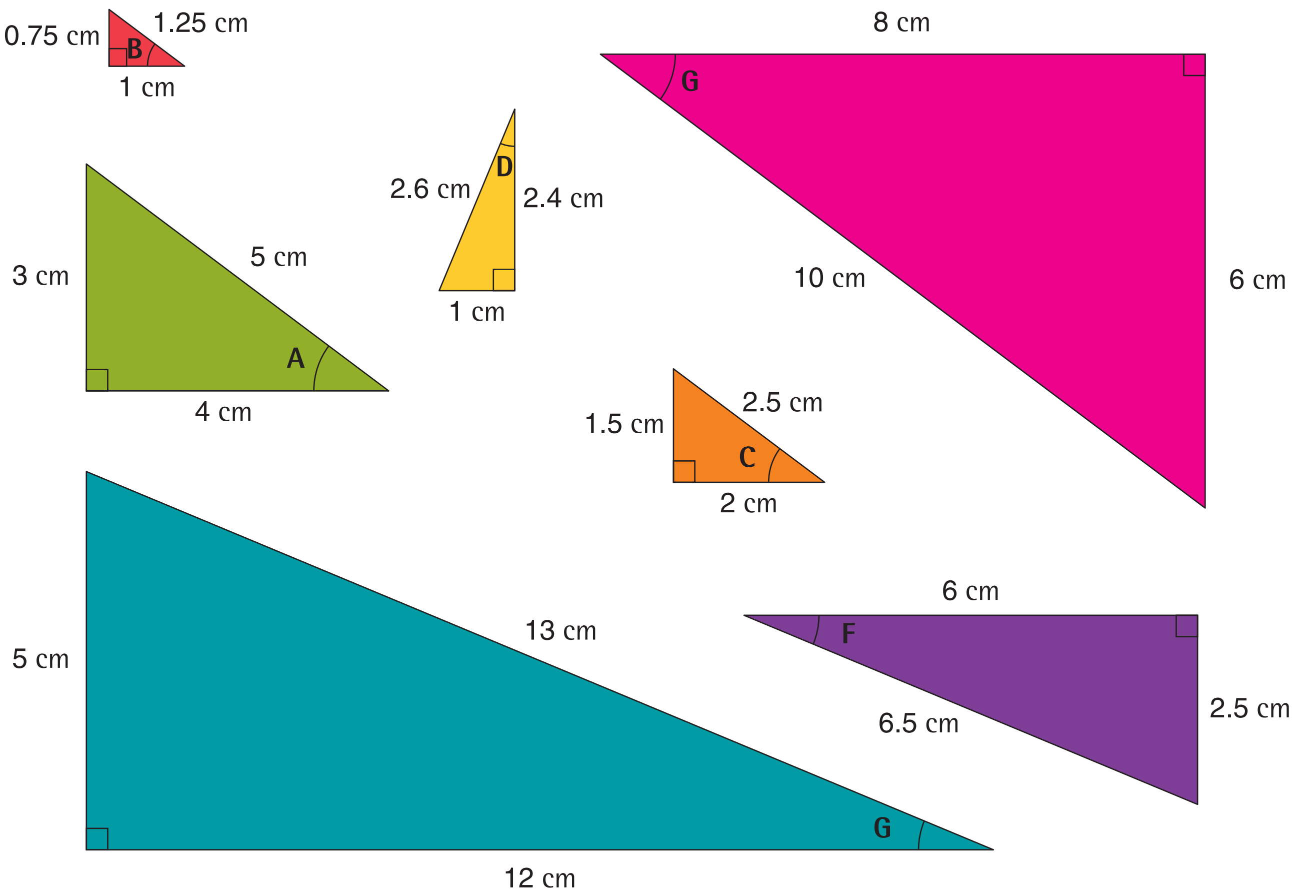


$\text{sen}(a) = \frac{2}{3}$ $\text{sen}(b) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

La propiedad anterior también se cumple con el coseno, es decir, si el valor del coseno para dos ángulos de triángulos rectángulos distintos (uno en cada triángulo) es el mismo, los triángulos son semejantes.

Verifica esta propiedad para los triángulos del apartado *Consideremos lo siguiente* y el que construiste en el inciso c) del apartado *Manos a la obra*.

II. A continuación aparecen siete triángulos en los que se distinguieron los ángulos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** y **G**, respectivamente.



Usando las medidas de los triángulos anteriores completa la siguiente tabla para cada uno de los ángulos marcados en el dibujo.

	Cateto adyacente (cm)	Cateto opuesto (cm)	Hipotenusa (cm)	Coseno = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	Seno = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
Triángulo verde (ángulo A)	4		5	$\frac{4}{5} = 0.8$	
Triángulo rojo (ángulo B)		0.75			$\frac{0.75}{1} = 0.75$
Triángulo naranja (ángulo C)		1.5			
Triángulo amarillo (ángulo D)			2.6		$\frac{1}{2.6}$
Triángulo azul (ángulo E)	12		13	$\frac{12}{13} = 0.923$	
Triángulo morado (ángulo F)		2.5	6.5		
Triángulo rosa (ángulo G)		6			$\frac{6}{10} = 0.6$

a) ¿Qué triángulos son semejantes al triángulo verde? ____________________

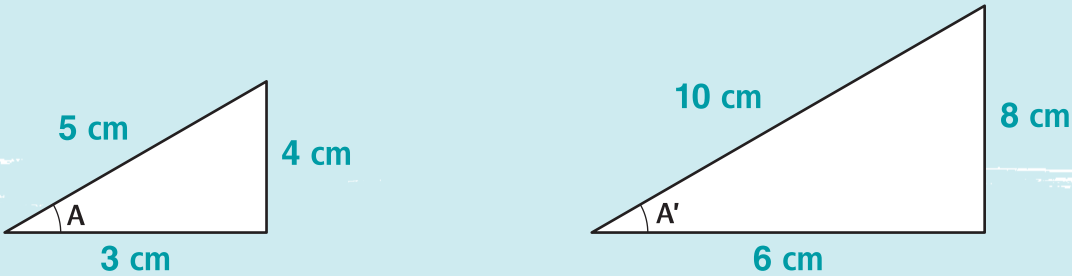
b) ¿Cómo es el valor del coseno que calculaste en la tabla para estos triángulos, distinto o igual? ____________________

c) ¿Qué triángulos son semejantes al triángulo azul? ____________________

d) ¿Cómo es el valor del seno que calculaste en la tabla para estos triángulos, distinto o igual? ____________________

Comparen sus respuestas.

En triángulos rectángulos semejantes el valor del seno y el coseno de ángulos correspondientes es el mismo. Por ejemplo:



$\cos(A) = \frac{3}{5} = 0.6$ $\qquad$ $\cos(A') = \frac{3}{6} = 0.5$

$\text{sen}(A) = \frac{4}{5} = 0.8$ $\qquad$ $\text{sen}(A') = \frac{6}{10} = 0.6$

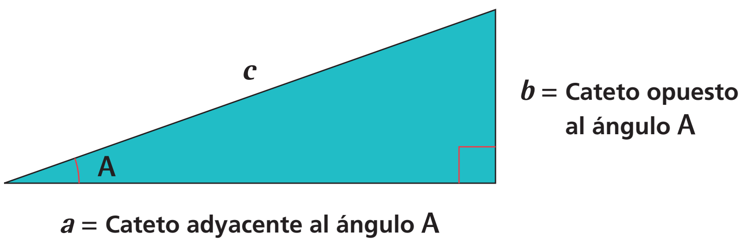
En ambos triángulos el valor del coseno es igual para los ángulos A y A´ y el valor del seno también.

30°, 45° Y 60°

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En las sesiones anteriores aprendiste a calcular la tangente, el seno y el coseno de un ángulo ***a*** en un triángulo rectángulo como el de la figura que sigue:



$\tan(A) = \frac{b}{a}$

$\text{sen}(A) = \frac{b}{c}$

$\cos(A) = \frac{a}{c}$

Figura 1

A los cocientes anteriores se les llama ***razones trigonométricas del ángulo A***. En esta sesión aprenderás a calcular las razones trigonométricas de algunos ángulos.

>>> Consideremos lo siguiente

a) Dibuja un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos mida 45°, ¿cuál es el valor de la tangente para ese ángulo? ____________

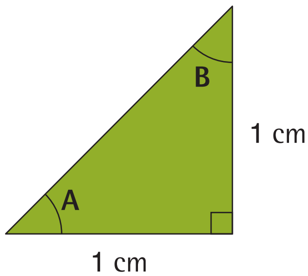
b) Dibuja un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos mida 60°, ¿cuál es el valor del coseno para ese ángulo? ____________

c) Encuentra el valor del seno para el ángulo de 30°. ____________

Comparen sus respuestas y comenten cómo obtuvieron sus resultados

>>> Manos a la obra

I. El siguiente es un triángulo rectángulo en el que ambos catetos miden 1 cm.



a) Usando el teorema de Pitágoras encuentra el valor de la hipotenusa en el triángulo anterior ____________

b) ¿El triángulo anterior es isósceles, escaleno o equilátero? ______________________________ . Justifica tu respuesta. ____________________

____

____

c) ¿Cuánto mide el ángulo **A**? ____________

d) ¿Cuánto mide el ángulo **B**?____________

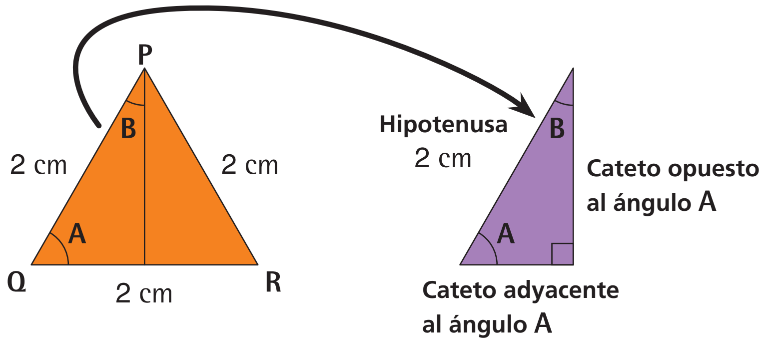
Recuerda que:
Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.

e) Completa la siguiente tabla. Para el ángulo **A**, encuentra el valor del seno, el coseno y la tangente.

Razones trigonométricas para el ángulo A	Valor numérico
$\text{sen}(A) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	
$\cos(A) = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	
$\tan(A) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron. Si tienen calculadora científica verifiquen sus resultados.

II. El triángulo **PQR** es equilátero, sus lados miden **1** cm; si se traza la altura se forman dos triángulos rectángulos como en la siguiente figura.



Recuerda que:

En un triángulo equilátero

- *sus tres ángulos internos miden 60°,*
- *para cada vértice, la altura correspondiente corta al lado opuesto al vértice en su punto medio.*

a) ¿Cuánto mide el ángulo **A**? ___________

b) ¿Cuánto mide el cateto adyacente al ángulo **A**? ___________

c) Usando el teorema de Pitágoras, encuentra cuánto mide el cateto opuesto al ángulo **A** ___________

d) Completa la siguiente tabla: para el ángulo **A**, encuentra el valor del seno, el coseno y la tangente.

Razones trigonométricas para el ángulo A	Valor numérico
$\text{sen}(A) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	
$\cos(A) = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	
$\tan(A) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	

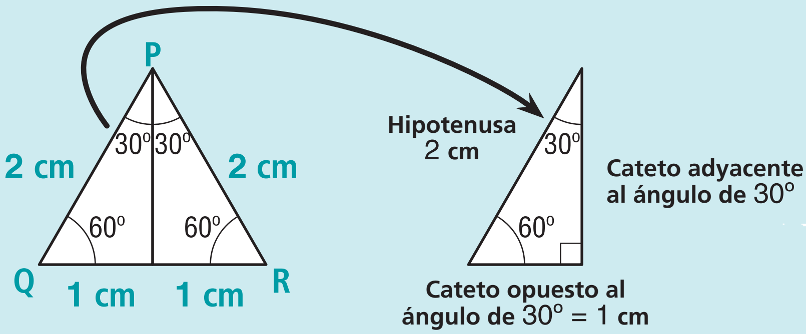
Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron. Si tienen calculadora científica verifiquen sus resultados.

>>> A lo llegamos

Para calcular la tangente de 30°, se puede hacer lo siguiente:

En el triángulo equilátero PQR, con lados que miden 2 cm, se traza la altura y se forman dos triángulos rectángulos, como en el dibujo.

Como el lado PQ mide 2 cm, entonces el cateto opuesto al ángulo de 30° mide 1 cm.



Usando el teorema de Pitágoras, se tiene que el cateto adyacente al ángulo de 30° mide $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ cm. Por lo que $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

e) Verifica, usando el dibujo anterior, que $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}(30°) = 0.5$

>>> Lo que aprendimos

Usa tu calculadora científica para encontrar la medida del seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos.

Ángulo en grados	Seno	Coseno	Tangente
10			
15			
20			
25			
35			

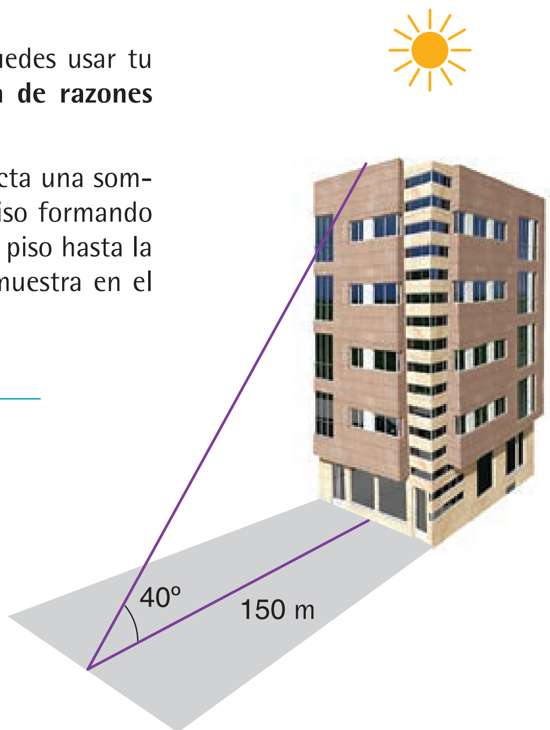
A RESOLVER PROBLEMAS

>>> A lo que llegamos

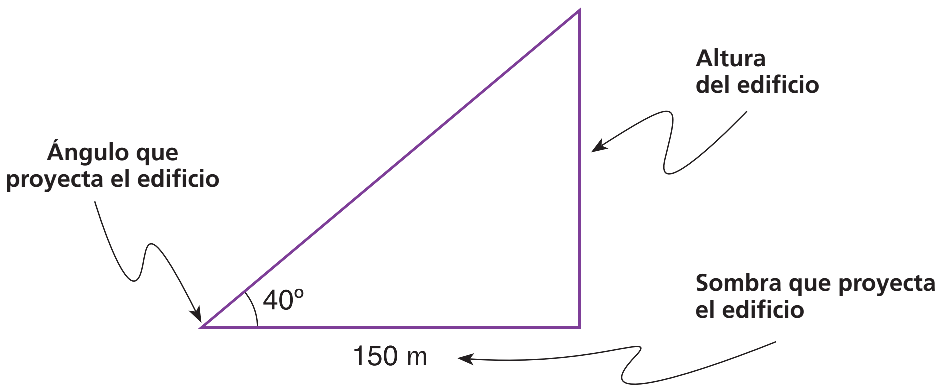
Para resolver los siguientes problemas puedes usar tu calculadora o consultar el anexo 1 **Tabla de razones trigonométricas.**

1. A cierta hora del día un edificio proyecta una sombra de 150 m sobre un punto en el piso formando un ángulo de 40° desde el punto en el piso hasta la parte más alta del edificio, como se muestra en el dibujo.

   ¿Qué altura tiene el edificio? ____________



Observa que podemos usar un triángulo rectángulo como el siguiente para ayudarnos a resolver este problema



Lo que queremos saber es la altura del edificio, es decir, la medida del cateto opuesto al ángulo de 40°.

Con tu calculadora o con las tablas que se encuentran en el anexo 1, **Tabla de razones trigonométricas**, completa la siguiente información:

	Seno	Coseno	Tangente
Ángulo de 40°			

¿Que razón trigonométrica usarías para encontrar la altura del edificio? Subráyala.

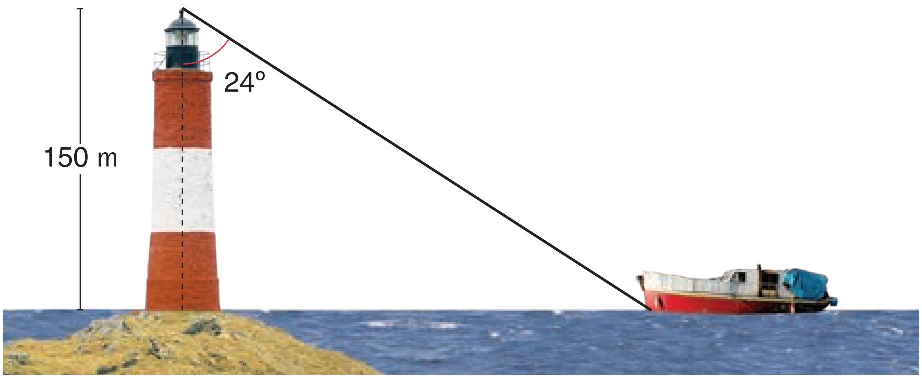
$$\text{sen}(40^\circ) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos(40^\circ) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan(40^\circ) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Sustituye los valores conocidos en la razón que elegiste y encuentra el valor de la altura del edificio.

Altura del edificio: ____________

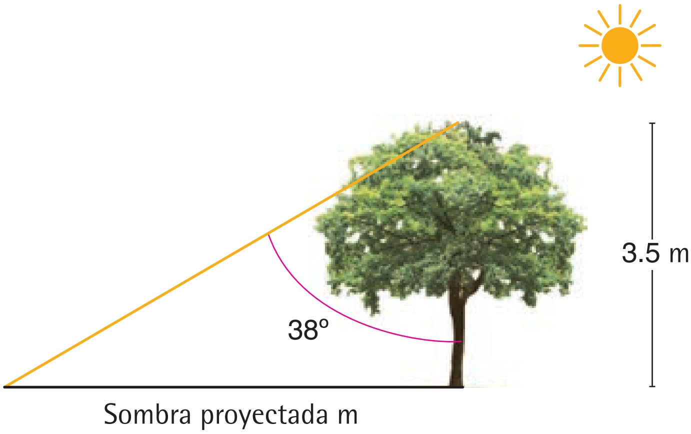
Comparen sus respuestas y comenten sus procedimientos.

2. Desde un faro situado a 40 m sobre el nivel del mar, se observa un barco bajo un ángulo de 24°, como se muestra en el dibujo.



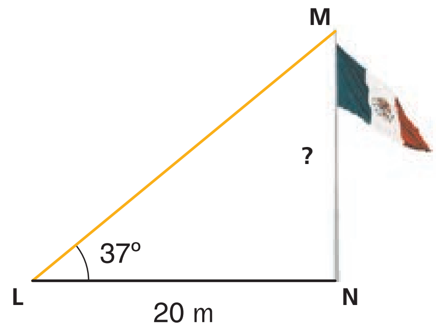
¿A qué distancia se encuentra el barco del faro? ____________

3. La inclinación de los rayos solares en cierto momento es de 38°. Si un árbol tiene 3.5 m de altura como en el dibujo:



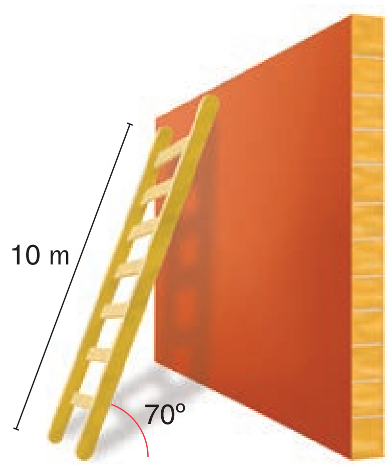
¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por el árbol? ____________

4. Calcula la altura del asta bandera, si a cierta hora del día el ángulo que forma el extremo de su sombra con la punta del asta mide 37°.



Medida del asta bandera: ___________

5. Una escalera de 10 m de longitud se apoya en una pared formando un ángulo de 70° con el piso.



Usa el seno del ángulo de 70° para calcular qué distancia hay del piso a la altura de la escalera.

Distancia del piso a la punta de la escalera: ___________

Para analizar más ejemplos de aplicación de las razones trigonométricas, pueden ver el programa *Ejercicios con razones trigonométricas*.

>>> Para saber más

Sobre las razones trigonométricas, consulta:
http://w3.cnice.mec.es/Descartes/Bach_CNST_1/Razones_trigonometricas_operaciones_identidades/razones2.htm
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

SECUENCIA 24

El crecimiento exponencial y el lineal

Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.

SESIÓN 1

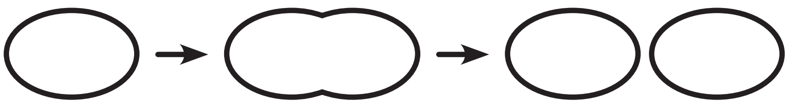
CRECIMIENTO DE POBLACIONES

>>> Para empezar

Las bacterias son organismos unicelulares, tan pequeños que no pueden verse sin microscopio. Y son causantes de múltiples enfermedades.

En la naturaleza se pueden encontrar distintas formas de reprodrucción de las especies.

Por ejemplo, las bacterias se parten en dos para reproducirse, es decir, una bacteria se alarga y se estrecha por la mitad hasta que se parte y se convierte en dos bacterias idénticas a la original.



Otra forma peculiar la podemos encontrar en las colonias de hormigas. La mayoría de las colonias se inician con una hormiga reina proveniente de otro hormiguero. La hormiga reina cava un agujero y se esconde ahí; después de un tiempo empieza a procrear nuevas hormigas. Durante un largo periodo, la reina es la única encargada en generar nuevos miembros a la colonia; más adelante aparecen nuevas reinas que la ayudan a seguir procreando.

>>> Consideremos lo siguiente

En un frasco hay una bacteria y se sabe que le toma 10 minutos para partirse en dos.

a) ¿Cuántas bacterias habrá en el frasco después de 30 minutos? __________

b) Si después de 10 días el frasco está a la mitad, ¿cuánto tiempo faltará para llenarse?

____

c) Si la hormiga reina engendra dos nuevas hormigas cada día, ¿cuántas hormigas habrá (sin incluir a la reina) después de 5 días? __________

d) Si el hormiguero está a la mitad de su capacidad después de 1 año, ¿cuánto tiempo faltará para llenarse? __________

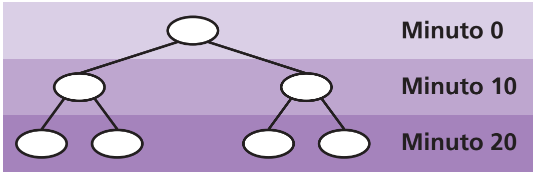
Comparen sus respuestas y comenten

Para duplicar la cantidad de bacterias, ¿se requiere el doble de tiempo?

Para duplicar la cantidad de hormigas, ¿se requiere el doble de tiempo?

>>> Manos a la obra

I. Observa el siguiente diagrama que ilustra cuántas bacterias habrá después de 20 minutos.



Completa la siguiente tabla para calcular cuántas bacterias habrá en el frasco después de una hora.

Minutos	0	10	20	30	40	50	60
Bacterias	1	2					

II. De las siguientes sucesiones de números, ¿cuál está asociada al crecimiento de las bacterias en espacios de 10 minutos? Subráyala.

a) 1, 2, 4, 8, 16, … b) 1, 2, 3, 4, 5, … c) 1, 2, 4, 6, 8, …

Describe con tus palabras cómo generar cada elemento de la sucesión.

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Las sucesiones en las que cada término es resultado de multiplicar el término anterior por un número fijo son llamadas sucesiones exponenciales. El número fijo por el que se multiplica es llamado razón común. Por ejemplo, la sucesión correspondiente a la reproducción de las bacterias es exponencial porque el número de bacterias que habrá dentro de 10 minutos se obtiene multiplicando el número actual por 2. En este caso la razón común es 2.

Además, en las sucesiones exponenciales, los términos también se pueden obtener elevando la razón común a algún exponente. Por ejemplo, la siguiente sucesión exponencial con razón común 2:

$$7, \quad 14, \quad 28, \quad 56, \quad 112, \ldots$$

se puede escribir como:

$$7 \times 2^0, \quad 7 \times 2^1, \quad 7 \times 2^2, \quad 7 \times 2^3, \quad 7 \times 2^4, \ldots$$

III. a) Calcula el número de bacterias que habrá en el frasco después de 2 horas.

____

b) ¿Es este número el doble que el número de bacterias que había en 1 hora?

____

c) En el problema del apartado *Consideremos lo siguiente*, ¿será verdad que el frasco se llenará en 20 días? ________ . ¿Por qué? ____________________

____

IV. Completa la siguiente tabla para calcular cuántas hormigas habrá después de 5 días (sin contar a la hormiga reina).

Número de días	0	1	2	3	4	5
Hormigas	0	2				

¿Cuántas hormigas habrá después de 10 días? __________

¿Cuántas hormigas habrá después de 30 días? __________

Comparen sus respuestas y comenten.

La relación entre el número de días y el número de hormigas, ¿es de proporcionalidad?

V. De las siguientes sucesiones, ¿cuál asociarías al crecimiento de las hormigas? Subráyala.

a) 2, 4, 8, 16, 32, … b) 2, 4, 6, 8, 10,… c) 2, 3, 4, 5, 6, …

Explica con tus propias palabras cómo se genera la sucesión que elegiste.

____

____

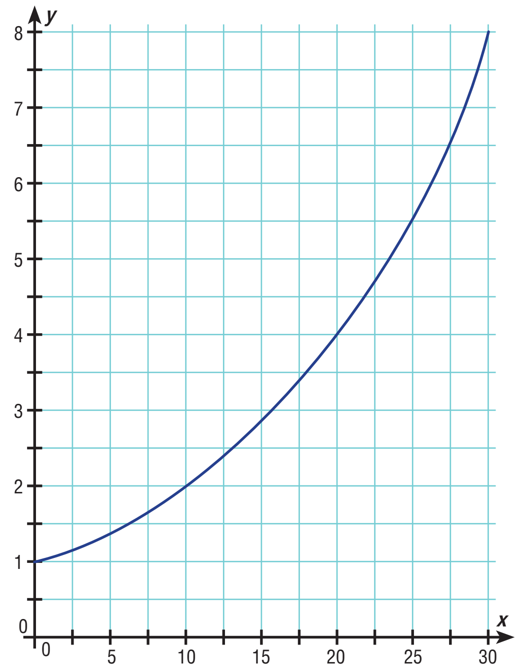
Comparen sus respuestas. Y comenten si es exponencial el crecimiento de las hormigas.

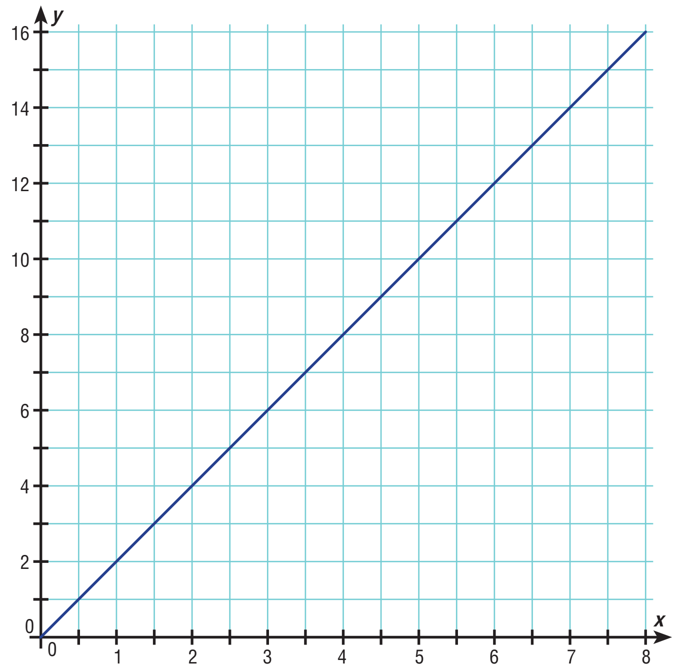
>>> A lo que llegamos

La diferencia entre el crecimiento de las bacterias y el de las hormigas es que, mientras el de las bacterias es exponencial (se multiplica por dos para obtener el siguiente), el de las hormigas es lineal (se suman dos para obtener el siguiente). Entonces, para duplicar o triplicar la cantidad en un crecimiento exponencial no es correcto duplicar o triplicar el tiempo. Por otro lado, la cantidad de hormigas además de crecer linealmente lo hacen proporcionalmente y esto implica que al doble de tiempo hay el doble de hormigas.

Para conocer más sobre el crecimiento exponencial, pueden ver el programa *La exponencial y la lineal*.

VI. Decide cuál de estas gráficas corresponde al crecimiento de las hormigas y cuál al de las bacterias. Y después anota en cada gráfica el nombre de los ejes. Las posibilidades son: "Días", "Minutos", "Cantidad de hormigas" y "Cantidad de bacterias".





Comparen sus respuestas y comenten sus razones.

>>> Lo que aprendimos

1. ¿Cuál de las siguientes tres sucesiones crece exponencialmente? Señálala con una ✓.

☐ **1, 3, 5, 7, 9, ...** ☐ **1, 3, 9, 27, 81, ...** ☐ **1, 4, 9, 16, 125, ...**

2. Las siguientes sucesiones crecen de forma exponencial. Para cada una escribe cuál es su razón común.

a) 3, 6, 12, 24, 48, ... **Razón común =** ____________

b) 2, 6, 18, 54, 162, ... **Razón común =** ____________

3. En un frasco hay tres bacterias que se generan por bipartición cada 10 minutos.

a) ¿Cuántas bacterias habrá en el frasco después de 1 hora? ____________

b) Si el frasco está a la mitad en 10 días, ¿cuánto tiempo faltará para llenarse?

____

SESIÓN 2

INTERÉS COMPUESTO

>>> Para empezar

El interés es el porcentaje de ganancia que se obtiene al hacer un préstamo o una inversión. Por ejemplo, si alguien presta $1 000 pesos y al año le pagan $1 500, se dice que ganó 500 de interés, o bien, que cobró 50% de interés. Cuando el interés ganado se reinvierte (o se vuelve a prestar), la nueva suma de dinero generará más ganancias. Al porcentaje ahora ganado se le llama interés compuesto, pues se obtuvo de interés sobre el interés antes ganado.

>>> Consideremos lo siguiente

Don Armando invirtió $10 000 pesos en una cuenta bancaria y el banco le pagará el 10% anual de interés. Es decir, por el primer año que deje invertido el dinero, le darán $1 000 pesos de interés (10% de $10 000 pesos). Si don Armando decide no retirar sus ganancias y dejar el dinero un año más, al año siguiente el banco le dará $1 100 pesos de interés (10% de $11 000 = $10 000 + $1 000) por lo que en la cuenta habrá $12 100. Esto es, el banco está pagando interés compuesto.

Don Armando deja su dinero en el banco por cinco años, sin retirar las ganancias de su inversión. Gracias al interés que le paga el banco, el dinero en inversión aumenta año con año.

a) Completa la siguiente tabla y observa cómo crece el dinero de don Armando.

Tiempo de inversión (años)	0	1	2	3	4	5
Cantidad en la cuenta (pesos)	10 000	11 000	12 100			

b) Si el banco pagara a don Armando $1 000 pesos cada año (sin calcular ningún porcentaje), ¿qué cantidad de dinero tendría don Armando al final de los 5 años?

_______________ . ¿Y si le pagara $1 500? _______________

c) ¿Con cuál de estas tres opciones ganaría más: 10% anual reinvirtiendo las ganancias, $1 000 pesos anuales o $1 500 pesos anuales? ____________

Comparen sus repuestas.

Si pasara más tiempo, ¿cambiaría la opción con la que se gana más dinero?

¿Cuánto tiempo más?

>>> Manos a la obra

I. Para calcular lo que ganará cada año, don Armando multiplica por un **número** la cantidad de un año para obtener la del siguiente, la idea que usó don Armando para encontrar el número fue:

Lo que tendré el siguiente año = lo que tenga este año + 0.10 **× lo que tenga este año =**

= (?) × lo que tenga este año.

¿Qué **número** encontró? ____________

Escribe los primeros términos de la sucesión asociada a la inversión de don Armando.

10 000, 11 000, 12 100, __________ , __________ , __________ , ...

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Es exponencial el crecimiento de la inversión?

b) ¿Cuál es la razón común de este crecimiento?

>>> A lo que llegamos

El crecimiento de una inversión que paga interés compuesto es exponencial, pues se multiplica la inversión por un número fijo cada periodo de tiempo. Por ejemplo, si se invierten $1 000 pesos con interés del 2% mensual, entonces, la inversión se multiplica por 1.02 cada mes, es decir, la razón común es 1.02.

Tiempo de inversión (meses)	0	1	2	3
Inversión (pesos)	1 000	1 000 × (1.02) = 1020	1 020 × (1.02) = 1 040.04	1 040.04 × (1.02) = 1 061.208

II. La siguiente tabla muestra cómo fue creciendo el dinero de don Armando al paso de los años. Completa el tercer renglón para determinar en cuánto se incrementó cada año.

Tiempo de inversión (años)	0	1	2	3	4	5
Inversión (pesos)	10 000	11 000	12 100	13 310	14 641	16 105.10
Cantidad ganada en el año (pesos)						

a) La cantidad ganada en cada año, ¿aumenta, disminuye o se queda igual? ______

b) La cantidad ganada en cada año, ¿crece exponencialmente? ____________

¿Cuál es la razón común? ____________

III. La siguiente tabla muestra cómo crecería el dinero de don Armando si el banco le ofreciera pagar $1 500 por año. Completa la tabla.

Tiempo de inversión (años)	0	1	2	3	4	5
Inversión (pesos)	10 000	11 500	13 000	14 500	16 000	17 500
Cantidad ganada en el año (pesos)						

Recuerdan que:

Una relación es lineal si es de la forma $y = ax + b$ *con* **a** *y* **b** *números constantes.*

a) La relación entre el número de años (x) y la cantidad en inversión (y), ¿es lineal? ______ . Escribe la expresión: ______________________

b) La cantidad ganada cada año, ¿aumenta, disminuye o se queda igual? ______

IV. Observa las tablas de la actividad **II** y **III**, y contesta:

¿En qué caso la cantidad ganada por año aumenta cada vez más? ______________

Si se dejaran pasar más años, el aumento anual de esta inversión, ¿será mayor que $1 500? ___________

¿Y mayor que $2 000? ___________ . ¿Por qué? ______________________

____

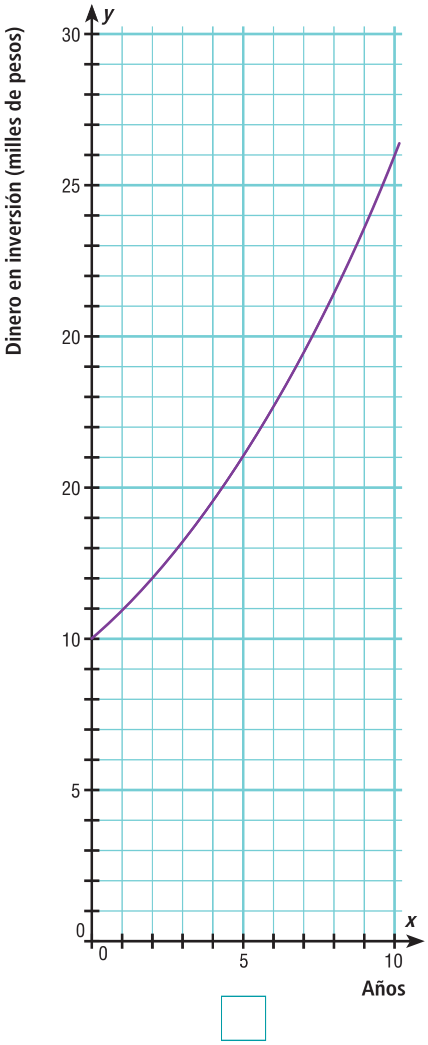
Comparen sus respuestas, comenten cuál de las siguientes afirmaciones será cierta y expliquen sus razones.

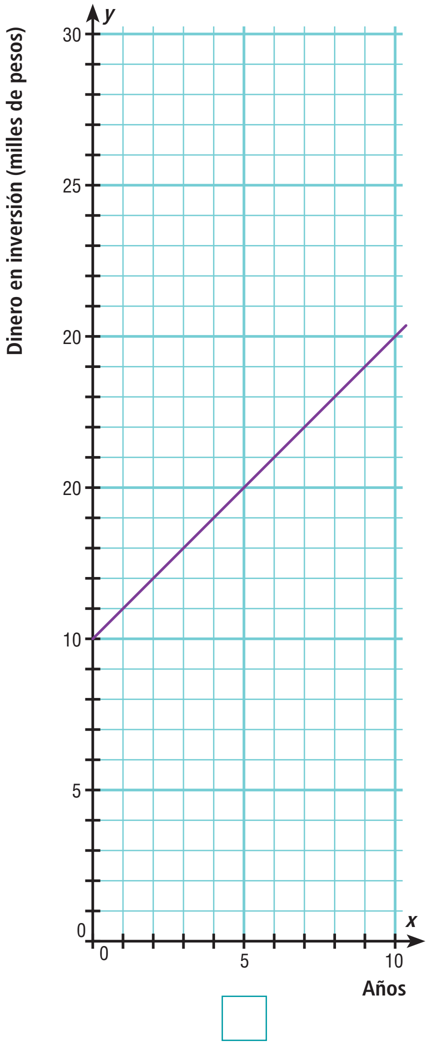
- Una inversión de $10 000 pesos puede ganar más dinero con pagos del 10% anual que con pagos anuales fijos.
- Una inversión de $10 000 pesos siempre gana más dinero con pagos fijos de $2 000 pesos anuales, que con una al 10% anual.

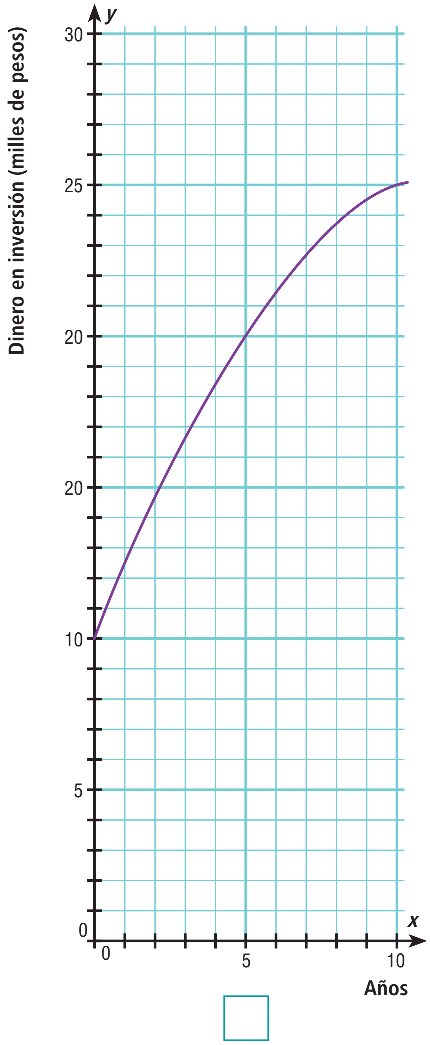
>>> A lo que llegamos

Los términos de una sucesión exponencial aumentan cada vez más.
Por ejemplo, en el caso de las inversiones con intereses fijos que es exponencial, el aumento en la inversión se hace más grande año con año.
Las sucesiones lineales aumentan siempre lo mismo, por lo que las exponenciales terminan por crecer más rápido que las lineales.

¿Cuál de las siguientes gráficas representa cómo incrementa la inversión de don Armando al paso de los años? Márcala con una ✓ .







>>> Lo que aprendimos

Si una inversión bancaria genera interés al 15% anual, ¿por cuál número hay que multiplicar la cantidad en la cuenta para obtener la cantidad que habrá al siguiente año?

____

SESIÓN 3

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN EXPONENCIAL

>>> Para empezar

El crecimiento de la población mundial es de importancia para todos. ¿Cuántos somos y cúantos seremos? son el tipo de preguntas que se hacen a menudo los gobernantes de todos los países. Para contestarlas, hay organismos internacionales que realizan censos (conteos) para estimar cuántos somos. Pero para saber cuántos seremos no es tan fácil, pues es complicado determinar si habrá guerras, enfermedades o algo que desacelere el crecimiento de la población. Lo que se hace a menudo para dar respuesta es suponer que se mantendrá constante la tasa (porcentaje) de crecimiento de los últimos años.

>>> Consideremos lo siguiente

En el año 2000 un analista hizo la siguiente afirmación:

"Hoy somos aproximadamente 6 000 *millones de personas y en los últimos* 10 *años hemos crecido aproximadamente* 800 *millones. Si se mantiene esta tasa de crecimiento, dentro de* 50 *años seremos más del doble".*

El reportero que entrevistaba el analista le comentó:

"Disculpe la interrupción, pero no me salen las cuentas. Si crecieramos 800 *millones cada* 10 *años, dentro de* 50 *años seríamos* 10 000 *millones, que no es el doble".*

Según lo dicho por el analísta, ¿cuánta población había en el año 2000? __________ ; ¿y en 1990? __________ ; ¿crees que el analista se equivocó en sus cálculos? __________ . ¿Por qué? ____

____ .

¿Cómo supones que hizo sus cálculos el analista para llegar a esa conclusión? ______

____

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Es lo mismo decir que la población crece a una tasa constante a decir que aumenta la misma cantidad?

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas,

a) Entre el año 1990 y el 2000, ¿cuál fue la tasa de crecimiento de la población? __________ %.

b) Si se conservara la tasa para el año 2010, ¿cuánta población habrá para esa fecha? __________

c) ¿Cómo calculaste cuánta pobación habrá en el 2010? ____________________

____

Comparen sus respuestas.

II. Completa la siguiente tabla para determinar cuánta población habrá en 2050 según los cálculos del analista.

Año	**1990**	**2000**	**2010**	**2020**	**2030**	**2040**	**2050**
Población (millones)	5 200	6 000					
Tasa de crecimiento		15%	15%	15%	15%	15%	15%

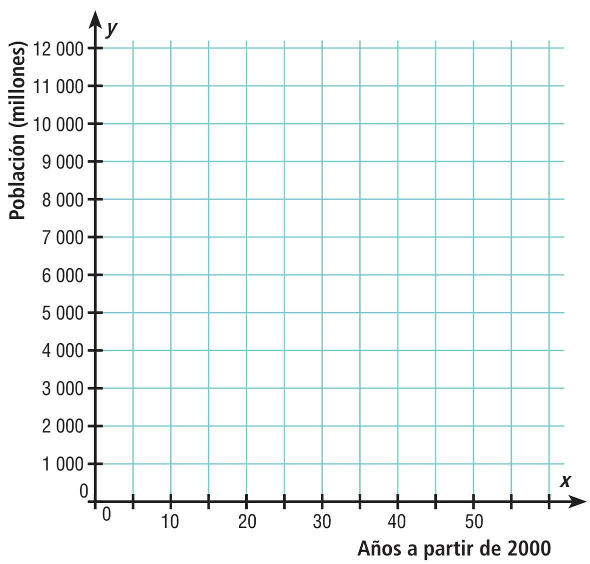
En esta tabla, el crecimiento de la población es exponencial. ¿Cuál es la razón común?

____

Comparen sus respuestas y comenten si es correcta la afirmación del analista:

Si se mantiene esta tasa de crecimiento, dentro de 50 años seremos más del doble.

III. En el siguiente plano cartesiano localiza los puntos que corresponden a la relación entre el año y la cantidad de población, si se mantuviera la tasa del 15% de crecimiento (tabla anterior). Después traza una curva que pase por todos los puntos que localizaste.

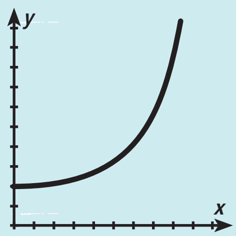


IV. Sobre el mismo plano cartesiano localiza los puntos que corresponden a cómo crecería la población si cada 10 años se incrementara 800 millones de habitantes. Después une los puntos. ¿De qué tipo de gráfica se trata: recta o curva? ____________________

V. De las dos gráficas que quedaron dibujadas, señala la que corresponde al cálculo del analista y la que corresponde al cálculo del reportero.

>>> A lo que llegamos

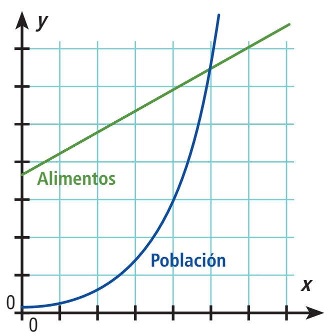
Cuando la tasa de crecimiento de una población se mantiene constante, entonces el crecimiento es exponencial. La gráfica de una relación exponencial es una curva que se ve así:

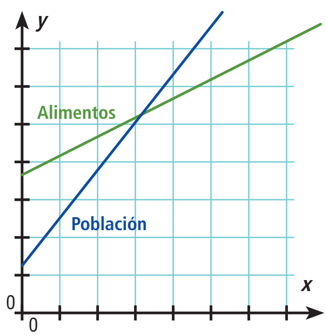


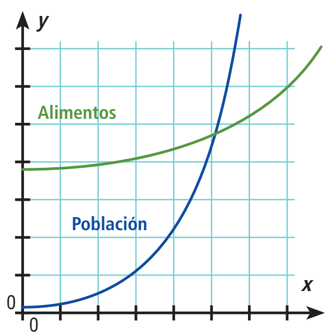
Para conocer más ejemplos de crecimiento exponencial y su gráfica, pueden ver el programa *Gráfica de la exponencial*.

>>> Lo que aprendimos

1. Algunas teorías económicas, de mucha controversia, explican que el crecimiento de la población mundial es exponencial y el de la producción de alimentos es lineal. Por lo que, en algún momento, habrá una catástrofe mundial por la disputa de alimentos. Elige la gráfica que bosqueja mejor esta idea y márcala con ✓.







☐ ☐ ☐

En la gráfica que elegiste, marca el punto que correspondería al momento de la catástrofe.

LA DEPRECIACIÓN DE LAS COSAS

SESIÓN 4

>>> Para empezar

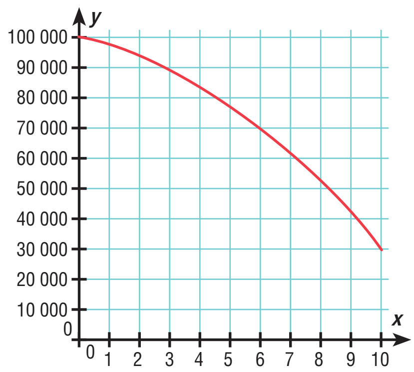
Por lo general, el valor real de un objeto empieza a disminuir al paso del tiempo, a eso se le llama ***depreciación***. Por ejemplo, el valor de un automóvil disminuye al paso de los años, pues ya está usado, ya hay otros más nuevos, etc., así que, entre más tiempo pase, más barato se tiene que vender el automóvil. Hay otras cosas que no se deprecian, y que inclusive pueden subir de precio, por ejemplo, un terreno bien ubicado o un collar de oro.

>>> Consideremos lo siguiente

Un automóvil que cuesta $100 000 pesos se deprecia un 10% cada año. ¿Cuánto costará el automóvil después de 1 año? ________________ . ¿Y después de dos años?

____

¿Cuál de las siguientes gráficas describe mejor el cambio de precio del automóvil? Márcala con ✓.



Comparen sus respuestas y comenten:

Si el precio disminuyera $10 000 pesos cada año, ¿cómo se vería la gráfica?

>>> Manos a la obra

I. Calculen el valor del automóvil al paso de los años, y completen la tabla.

Tiempo de vida del automóvil (años)	0	1	2	3	4	5	6
Valor actual del automóvil (pesos)	100 000	90 000					
Disminución respecto al año anterior (pesos)	10 000						

La diferencia del valor de un año al otro, ¿se hace más grande, se reduce o se queda igual cada año? ________________

Comparen sus respuestas y los procedimientos que usaron para llenar la tabla. Verifiquen que los datos en la tabla coincidan con la gráfica que eligieron.

>>> A lo que llegamos

Al igual que hay crecimiento exponencial, también hay decrecimiento exponencial. La diferencia es que, en el decrecimiento exponencial, la razón común es menor a uno; y en el crecimiento exponencial, es mayor a uno. Por ejemplo, la siguiente sucesión decrece exponencialmente, pues su razón común es $\frac{1}{2}$.

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Para conocer más sobre las características del decrecimiento exponencial, pueden ver el programa *Decrecimiento exponencial*.

II. En el caso del automóvil, su valor año con año decrece de forma exponencial. ¿Cuál es la razón común? ________________

>>> Lo que aprendimos

Realicen la siguiente actividad. Recorten un cuadrado de lado 16 cm y anoten aquí su área:

Área del cuadrado: ____________________ cm^2.

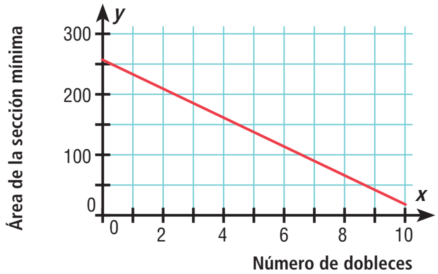
Doblen el cuadrado a la mitad varias veces y por cada doblez que hagan calculen y apunten el área de la región más pequeña que se forma en la hoja. Llenen la siguiente tabla:

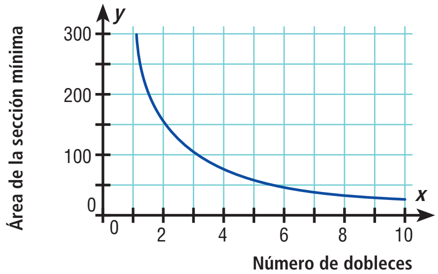
Número de doblez	1	2	3	4	5
Área de la región pequeña (cm^2)					

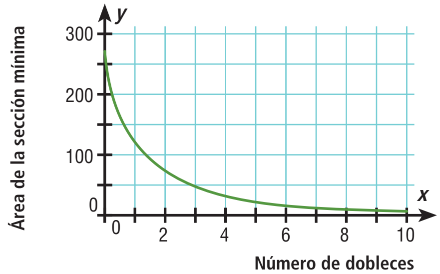
¿El área decrece exponencialmente? ________ . ¿Cuál es la razón común? ___________

¿Qué área tendrá la región más pequeña después de doblar 10 veces al cuadrado original? ______________ cm^2.

¿Cuál de las siguientes gráficas creen que refleje cómo se comporta este decrecimiento?







>>> Para saber más

Sobre el interés compuesto, consulten:
http://valle.fciencias.unam.mx/~lugo/bach1/Intereses/index.html
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Facultad de Ciencias. UNAM.

Sobre el crecimiento exponencial, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Perelman, Yakov. “54. Leyenda sobre el tablero de ajedrez” en *Matemáticas recreativas*. México: SEP/Planeta, Libros del Rincón, 2003.

Representación de la información

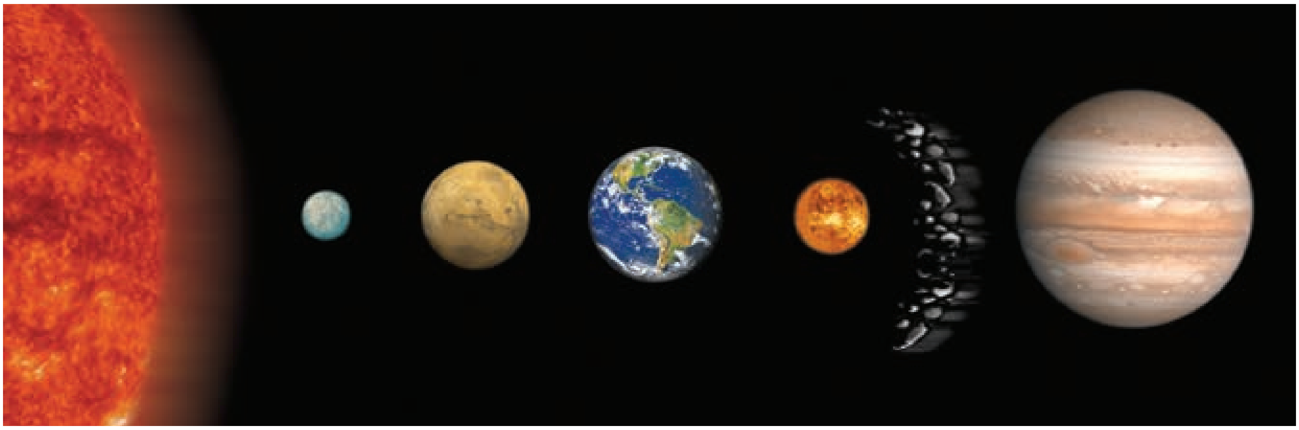
En esta secuencia conocerás problemas cuya resolución requiere que tomes en cuenta mucha información.

SESIÓN 1

MUCHOS DATOS

>>> Para empezar

Nuestro sistema solar está conformado por ocho planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno (recientemente, Plutón fue eliminado de la lista debido a que es demasiado pequeño para ser considerado planeta). En la siguiente figura se muestran los cinco planetas más cercanos al Sol.



Los asteroides son cuerpos rocosos o metálicos más pequeños que los planetas. En la figura puedes ver que entre Marte y Júpiter hay un grupo de asteroides, y debido a su ubicación en el sistema solar, algunos científicos plantearon la hipótesis de que eran los restos de un planeta que se desintegró hace muchos años.

Actualmente se sabe que esa hipótesis es falsa, y en esta sesión estudiaremos cómo se llegó a dicha conclusión. Empecemos suponiendo que sí existió un planeta entre Marte y Júpiter al que llamaremos planeta X.

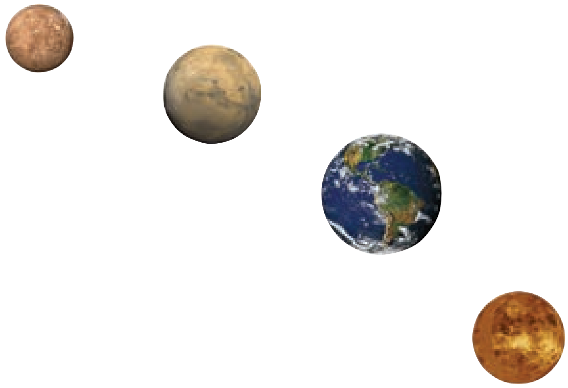
>>> Consideremos lo siguiente

Para medir las distancias que hay entre los cuerpos celestes de nuestro sistema solar, los astrónomos utilizan una unidad de longitud llamada Unidad Astronómica (UA), que es la distancia de la Tierra al Sol.

En la siguiente tabla se muestran las distancias que hay entre algunos planetas y el Sol. Descubre el patrón y aproxima las distancias a las que se encuentran Mercurio, Neptuno y el planeta X.

Planeta	Distancia al Sol (UA)
Mercurio	
Venus	0.7
Tierra	1.0
Marte	1.6
Planeta X	
Júpiter	5.2
Saturno	10.0
Urano	19.6
Neptuno	

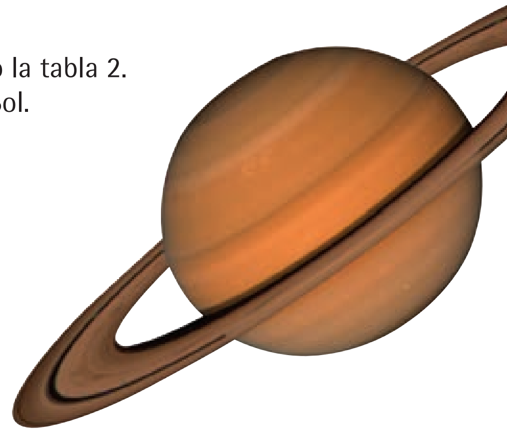
Tabla 1



Comparen sus respuestas y sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. Encuentra el patrón que hay en las diferencias de distancias completando la tabla 2. Esto te ayudará a descubrir el patrón en las distancias de los planetas al Sol.



Número de Planeta	Planeta	Distancia al Sol (UA)
1	Mercurio	
2	Venus	0.7
3	Tierra	1.0
4	Marte	1.6
5	Planeta X	
6	Júpiter	5.2
7	Saturno	10.0
8	Urano	19.6
9	Neptuno	

Diferencia de distancias (UA)
0.3
0.6
4.8
9.6

Tabla 2

a) Describe cuál fue el patrón que encontraste para las diferencias.

b) Usa estas diferencias para calcular nuevamente las distancias al Sol de los planetas Mercurio, Neptuno y el planeta X. Después, compara estos valores con los que habías calculado antes.

Comparen sus respuestas.

II. Al patrón que encontraste en la actividad anterior se le conoce como Ley de Bode. Lee la siguiente reseña sobre la Ley de Bode y después contesta las preguntas.

En 1772 el astrónomo alemán Johann Daniel Titius descubrió un patrón entre las distancias de los planetas al Sol. Este descubrimiento fue publicado más tarde por Johan Elert Bode y hoy se le conoce como la ley de Bode. Basado en el patrón, Bode afirmó que debía existir un planeta ubicado a 2.8 UA del Sol: el planeta X. Muchos buscaron al planeta, mas lo que hallaron fueron asteroides. En 1801 el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi descubrió a 2.76 UA del Sol (muy cerca de lo predicho por Bode) un asteroide hoy conocido como Ares, y miles de otros pequeños asteroides han sido encontrados a distancias similares.

La ley de Bode también ayudó a descubrir a Urano, sin embargo, cuando Neptuno fue descubierto a 30 UA del Sol los astrónomos se dieron cuenta de que la ley de Bode no describe completamente la distribución de los planetas en nuestro sistema solar.

a) ¿Por qué la existencia de los asteroides era evidencia a favor de la ley de Bode?

b) ¿Cómo ayudó la ley de Bode para encontrar el planeta Urano?

c) ¿Por qué el descubrimiento de Neptuno hizo que los astrónomos desecharan la ley de Bode?

Comparen sus respuestas.

>>> Lo que aprendimos

1. La siguiente tabla contiene información sobre los ocho planetas que conforman el sistema solar. Usa esos datos para contestar lo que se te pide.

Planeta	Tierra	Júpiter	Marte	Mercurio	Neptuno	Saturno	Urano	Venus
Distancia promedio al Sol (millones de km)	149.6	778	227.9	57.9	4 497	1 427.2	2 870	108.2
Diámetro (km)	12 755	14 2748	6 786	4 879	49 568	120 057	51 820	12 104
Velocidad de traslación alrededor del Sol (km/h)	107 248	47 018	86 872	172 412	19 549	34 705	24 517	126 115
Velocidad de rotación sobre su eje (km/h)	1 674	45 585	866	11	9 719	36 841	14 795	6
Periodo de traslación: tiempo que tarda en dar una vuelta al Sol (años)	1	11.86	1.88	0.2408	164.8	29.46	84.01	0.6151
Periodo de rotación (tiempo que tarda en dar una vuelta sobre su eje)	23.9 horas	9.9 horas	24.6 horas	58.7 días	15.8 horas	10.2 horas	10.7 horas	243 días
Número de lunas	1	12	2	0	2	10	5	0

Tabla 3

Las siguientes afirmaciones están basadas en la información de la tabla anterior, ¿cuál o cuáles son correctas?

☐ A mayor distancia al Sol, mayor periodo de traslación.

☐ Entre más grande sea un planeta, tiene más lunas.

☐ Entre más pequeño es el planeta, más lentamente gira sobre su eje.

Comparen sus respuestas.

2. El matemático Johannes Kepler (1571-1630) descubrió la relación entre el tiempo que tarda un planeta en darle la vuelta al Sol (T años) y la distancia media entre el planeta y el Sol (R millones de kilómetros). La relación se representa con la expresión:

$$\frac{R^3}{T^2} = K, \text{ donde } K \text{ es una constante.}$$

Recuerda que:

1 UA es aproximadamente 149.6 millones de kilómetros.

a) Con los datos de la tabla 3, encuentra el valor de la constante ***K***.

K = __________

b) Usa el valor de ***K*** para encontrar un valor estimado del tiempo que, de existir, le tomaría al planeta X dar la vuelta al Sol.

Tiempo en dar una vuelta completa al Sol = ________________

Para conocer más datos del Sol y los planetas, pueden ver el programa *El sistema solar*.

SESIÓN 2

DE IMPORTANCIA SOCIAL

>>> Para empezar

La siguiente tabla contiene algunos datos recaudados por el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), en el *Censo 2005*, de las mujeres mexicanas de 12 o más años. En esta tabla se han clasificado las mujeres por cantidad de hijos nacidos vivos y su condición de saber leer y escribir. Por ejemplo, el número 393 958 es la cantidad de mujeres que no tienen hijos y que no saben leer ni escribir.

Hijos por mujer	Mujeres que no saben leer ni escribir	Mujeres que sí saben leer y escribir	Mujeres que no especificaron
0 hijos nacidos	393 958	11 840 516	4 915
1 hijo nacido	184 497	4 437 193	2 007
2 hijos nacidos	247 674	5 803 809	2 379
3 hijos nacidos	297 985	4 862 409	2 176
4 hijos nacidos	325 930	2 622 937	1 864
5 hijos nacidos	326 915	1 488 118	1 574
6 o más hijos nacidos	1 703 444	3 081 457	6 606
No especificó el número de hijos nacidos vivos.	83 880	1 511 771	49 608

Tabla 4

>>> Consideremos lo siguiente

A partir de la información de la tabla anterior, un analista mexicano explicó en una entrevista que:

Cuando las mujeres saben leer y escribir, comienza el control de natalidad.

El analista detalló su afirmación explicando que las mujeres en edad reproductiva, que no saben leer ni escribir, no acostumbran tomar medidas para limitar la cantidad de hijos que van a tener, por lo que dichas mujeres tienen más hijos que una mujer que sabe leer y escribir.

El entrevistador le replicó al analista:

Disculpe... pero en 2005, de las mujeres que tuvieron 6 o más hijos, las que saben leer y escribir casi duplican en número a las que no saben.

a) ¿Es cierta la afirmación del entrevistador? __________ . ¿Contradice esto lo dicho por el analista? __________ . ¿Por qué? ______________________________

____

b) Con los datos de la tabla 4, decidan si lo dicho por el analista fue cierto en el año 2005.

Justifiquen su respuesta: ______________________________________

____

Comparen sus respuestas. y comenten si la siguiente afirmación es cierta o falsa:

Es natural que ocurra lo dicho por el entrevistador pues, en general, son muchas más las mujeres que saben leer y escribir que las que no saben.

>>> Manos a la obra

I. Con los datos de la tabla 4, calculen lo siguiente. Para simplificar los cálculos, ignoren los datos no especificados: la última columna y el último renglón.

a) ¿Cuántas mujeres de 12 años o más no saben leer y escribir? __________

b) De este total de mujeres, ¿qué porcentaje representan las mujeres que tuvieron 6 o más hijos? __________%.

c) ¿Cuántas mujeres de 12 años o más saben leer y escribir? __________

d) De este grupo de mujeres, ¿qué porcentaje representan las mujeres que tuvieron 6 o más hijos? __________%.

e) De los dos porcentajes calculados, ¿cuál es mayor? __________

Comparen sus respuestas y comenten si estos porcentajes reafirman o refutan lo dicho por el analista.

II. Llenen ahora la siguiente tabla para encontrar el número total de individuos cuyas madres no saben leer ni escribir. En el caso de 6 o más hijos nacidos, calculen la cantidad mínima de individuos.

Hijos por mujer	Mujeres que no saben leer ni escribir	Total de individuos nacidos
0 hijos nacidos	393 958	0
1 hijo nacido	184 497	184 497
2 hijos nacidos	247 674	495 348
3 hijos nacidos	297 985	
4 hijos nacidos	325 930	
5 hijos nacidos	326 915	
6 o más hijos nacidos	1 703 444	

Tabla 5

Población femenina de 12 años y más por hijos nacidos vivos, según condición no saber leer ni escribir. *Censo 2005*, INEGI.

a) ¿Cuántos individuos son hijos de mujeres que no saben leer ni escribir? ________

b) En promedio, ¿cuántos hijos tiene una mujer que no sabe leer ni escribir? ________

III. Hagan una tabla como la anterior para encontrar el número total de individuos cuya madre sabe leer y escribir, y contesten lo siguiente:

a) ¿Cuántos individuos son hijos de mujeres que sí saben leer y escribir? ________

b) En promedio, ¿cuántos hijos tiene una mujer que sí sabe leer y escribir? ________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) En promedio, ¿quiénes tienen más hijos, las mujeres que sí saben leer y escribir o las que no?

b) Sus resultados, ¿corroboran lo dicho por el analista?

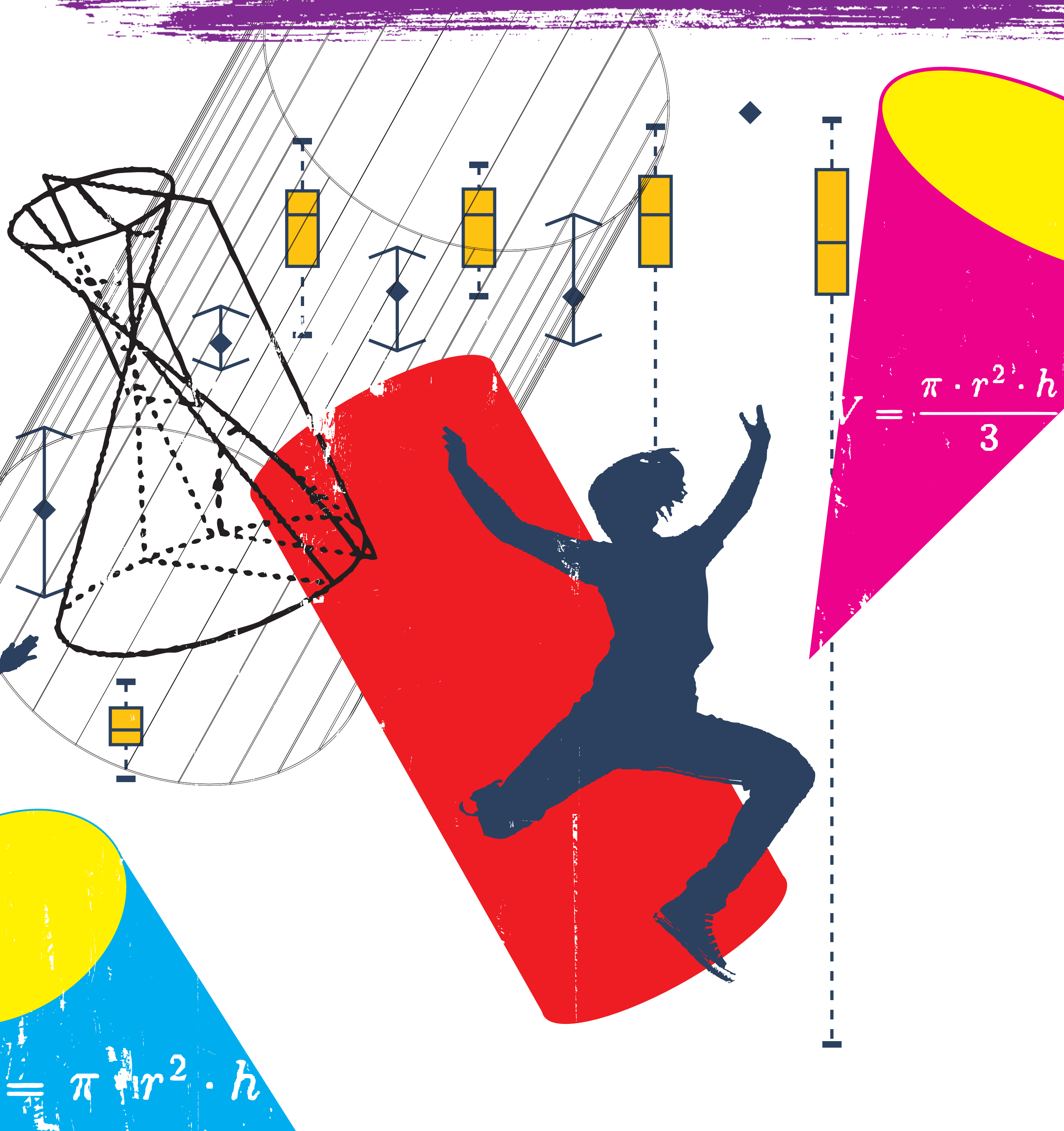
c) Si se tuvieran datos más precisos, ¿creen que cambiarían mucho los resultados?

d) En la cantidad de hijos de una familia, ¿cómo creen que afectará que el padre sepa o no leer y escribir?

>>> Para saber más

Sobre los datos de las mujeres que saben leer y escribir, consulten:
http://www.inegi.gob.mx/
Ruta: II-Conteo de Población y Vivienda 2005 → Consulta Interactiva de Datos → Población femenina de 12 años y más → Elegir en la variable Fecundidad la opción Hijos nacidos vivos y en Educación elegir Nivel de escolaridad, por último presionar Ver Consulta.
[Fecha de consulta: 7 de octubre de 2008].
Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática.

BLOQUE 5



Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

En esta secuencia aprenderás a determinar la ecuación lineal, cuadrática o sistema de ecuaciones con que se puede resolver un problema, y viceversa, proponer una situación que se modele con alguna ecuación de este tipo.

SESIÓN 1

LOS DISCÍPULOS DE PITÁGORAS

>>> Para empezar

En la secuencia 19 y en la secuencia 30 de tu libro de **Matemáticas II**, volumen II, aprendiste a resolver ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones respectivamente. En la secuencia 15 de tu libro de **Matemáticas III**, volumen II, aprendiste a resolver ecuaciones de segundo grado. En esta secuencia aprenderás a plantear y resolver problemas cuya solución requiere resolver ecuaciones de los tipos mencionados anteriormente.

>>> Consideremos lo siguiente

Pitágoras planteó este problema sobre el número de sus discípulos:

- El número de discípulos que tengo se distribuye de la siguiente manera:

  Una mitad estudia matemáticas, una cuarta parte física, una quinta parte estudia filosofía, y además hay tres mujeres.

  ¿Cuántos discípulos tenía Pitágoras? ______________________________

>>> Manos a la obra

I. Si x es el número de discípulos de Pitágoras, subraya la respuesta correcta.

a) ¿Qué cantidad de discípulos estudia matemáticas?

$2x$ $\qquad$ $x + 2$ $\qquad$ $\frac{x}{2}$

b) ¿Qué cantidad de discípulos estudia física?

$\frac{x}{4}$ $\qquad$ $x + 4$ $\qquad$ $4x$

c) ¿Qué cantidad de discípulos estudia filosofía?

$x + 5$ $\frac{x}{5}$ $5x$

d) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponden las condiciones del problema?

$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 3 = x$ $2x + 4x + 5x + 3 = x$ $\frac{x}{2} + 4x + \frac{x}{5} + 3x = x$

e) Resuelve la expresión que elegiste, ¿cuál es el valor de x? ____________________

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

II. El caballo y el asno.

Un caballo y un asno caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase el caballo de su enojosa carga, a lo que el asno dijo. "¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía."

a) ¿Cuántos sacos llevaba el caballo? ____________________

b) ¿Cuántos sacos llevaba el asno? ____________________

c) Si x es el número de sacos que lleva el caballo y si es y el número de sacos que lleva el asno, anota en el paréntesis el número de la ecuación que describe la situación.

( ) Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya.	1) $y + 1 = 2(x - 1)$ 2) $x - 1 = 2y$ 3) $x = y$
( ) Si te doy un saco, tu carga se igualaría a la mía.	1) $x = y$ 2) $x - 1 = 2y$ 3) $y - 1 = x + 1$

d) ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones está asociado con la resolución del problema anterior? Subraya el inciso correcto.

a) $y + 1 = 2(x - 1)$
$y - 1 = x + 1$

b) $x - 1 = 2y$
$y - 1 = x + 1$

c) $y + 1 = 2(x - 1)$
$y = x$

e) Resuelve el sistema que elegiste y verifica que los valores de x y de y sean la solución del problema.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

III. a) Determina a cuál de los enunciados no le corresponde ninguno de los sistemas y relaciona las columnas cuando haya correspondencia.

Sistema asociado	Enunciado del problema
( ) $y = 2x + 1$ $y = 4x - 1$	a) *El doble de la edad de Pedro más la edad de Ana es 31 años y el triple de la edad de Ana menos la edad de Pedro es 23 años.*
( ) $2x + y = 31$ $3y - x = 23$	b) *Juan le dice a Lucía, si te doy un peso entonces tendría el doble de dinero del que tendrías tú, pero si me das un peso yo tendría el cuádruple de dinero del que tendrías tú.*
( ) $y - 1 = 2(x + 1)$ $y + 1 = 4(x - 1)$	c) *Dos naranjas más un peso cuestan lo que cuesta un melón. Pero, también, cuatro naranjas menos un peso cuestan lo que cuesta un melón.*
( ) $y - 1 = 2(x + 1)$ $x + 1 = 4(y - 1)$	

b) Simplifiquen los sistemas de ecuaciones y resuélvanlos. Verifiquen también que la solución del sistema coincida con condición del enunciado.

>>> Lo que aprendimos

1. Diofanto fue un notable matemático de la Antigüedad. Parte de la historia de su vida fue tomada de la dedicatoria que aparece en la lápida de su sepulcro. La inscripción en la lápida constituye además un interesante ejercicio matemático. Completa la tabla usando la información que fue tomada de la lápida:

Lo que dice en la lápida de Diofanto	Lo que significa en lenguaje algebraico
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán larga fue su vida.	x = número de años que vivió Diofanto
La sexta parte de su vida constituyó su hermosa infancia.	$\frac{x}{6}$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubriese su barbilla.	$\frac{x}{12}$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en retiro.	
Pasó un lustro más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito.	5
El cual tuvo una hermosa existencia, que duró tan sólo la mitad de la de su padre.	$\frac{x}{2}$
Y con profunda pena descendió a la sepultura habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	4

Con la información de la tabla anterior completa la ecuación y resuélvela:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \_\_\_\_\_\_ + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

¿Cuántos años vivió Diofanto? ____________

2. Emilio y Mauricio se fueron a pescar, al final del día Mauricio dijo: "Si tu me das 3 de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú." A lo que Emilio respondió: "Si tú me das 3 de tus peces yo tendré el doble de peces que tú".

a) ¿Cuántos peces tiene Mauricio? ________________

b) ¿Cuántos peces tiene Emilio? ________________

ECUACIONES Y GEOMETRÍA

SESIÓN 2

>>> Lo que aprendimos

1. Se va a lanzar un cohete de juguete puesto sobre el piso. Se sabe que la altura ***h*** (en metros) que alcanza el cohete en determinado tiempo ***t*** (en segundos) está dada por la fórmula:

$$h = -2t^2 + 20t$$

a) Si se lanza el cohete, ¿cuánto tarda en llegar al piso nuevamente? __________

b) Completa la tabla de la derecha para saber la altura que tiene el cohete en determinados periodos de tiempo.

t Tiempo transcurrido (en segundos)	h Altura alcanzada (en metros)	Punto (t,h)
0	0	(0,0)
1	18	(1,18)
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

c) ¿Para qué valores de ***t*** el valor de ***h*** es cero?

__________ y ____________

d) Si el valor de la altura ***h*** es cero, ¿qué ecuación permite encontrar el tiempo en que alcanza esa altura? Subráyala.

$h = 0$

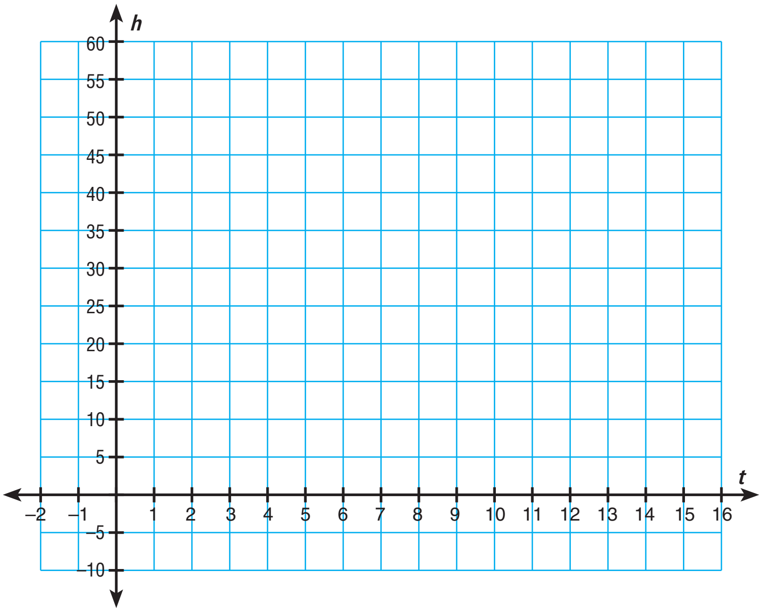
$0 = -2t^2 + 20t$

$h = -2t^2 + 20t$

e) Usando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado encuentra las soluciones de la ecuación que elegiste.

t_1 = __________ t_2 = __________

f) En el plano cartesiano de la siguiente página, grafica los puntos de la tabla anterior y completa la gráfica de la expresión algebraica.



g) ¿En qué puntos interseca la gráfica el eje t?

(______ , ______) y (______ , ______)

h) ¿Cuál es la abscisa de estos puntos? Subráyala.

(_____ , _____) y (_____ , _____)

i) ¿Cómo son las abscisas anteriores y las soluciones de la ecuación que resolviste en el inciso e) distintas o iguales?

____

Comparen sus resultados y comenten:

- Toda expresión de la forma $h = at^2 + bt + c$ tiene como ecuación asociada $0 = at^2 + bt + c$ para el valor de $h = 0$.
- Las soluciones de la ecuación anterior son las abscisas de los puntos donde la gráfica de la expresión $h = at^2 + bt + c$ interseca al eje t.

j) ¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que el cohete alcance una altura de 40 m sobre el piso? ________________

k) ¿Para qué valores de t el valor de h es 40? ____________ y ____________

l) Si el valor de la altura h es 40, ¿qué ecuación permite encontrar el tiempo en que alcanza esa altura? Subráyala:

$h = 40$ $\qquad$ $40 = -2t^2 + 20t$ $\qquad$ $h = -2t^2 + 20t$

m) Usando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, encuentra las soluciones de la ecuación que elegiste, aproxímalo con hasta dos decimales:

$t_1 =$ ____________ $\qquad$ $t_2 =$ ____________

Comparen sus resultados y comenten la relación que existe entre las soluciones anteriores y la gráfica de la expresión.

2. Para la expresión algebraica $y = x^2 - x - 16$ encuentra:

a) La ecuación asociada para el valor de $y = 0$.

b) Las soluciones de la ecuación que obtuviste en el inciso anterior.

c) Haz la gráfica de la expresión $y = x^2 - x - 16$.

d) Verifica que las soluciones que encontraste sean las abscisas de los puntos donde la gráfica interseca el eje x.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

3. Encuentra los números que satisfacen: *La suma de un número más uno elevada al cuadrado es igual al doble del número elevado al cuadrado.*

¿Cuántos números satisfacen la siguiente propiedad: la suma de un número más 1 elevada al cuadrado es igual al doble del número elevado al cuadrado? ____________

a) ¿Qué número o números satisfacen la condición anterior? ____________

b) Una de las siguientes ecuaciones modela el problema anterior:

1. $x + 1^2 = 2x^2$
2. $(x + 1)^2 = (2x)^2$

Desarrolla ambas y encuentra las soluciones de ambas ecuaciones.

Soluciones de la ecuación 1	Soluciones de la ecuación 2
x_1 = ____________	x_1 = ____________
x_2 = ____________	x_2 = ____________

Recuerda que:

$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$

c) Se sabe que uno de los números que satisfacen la propiedad es $-\frac{1}{3}$. Verifica con esta información las respuestas dadas anteriormente.

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

4. ¿Cuántas soluciones tiene la expresión $(x + 5)^2 + 3 = (x + 1)^2 + 4^3$? ____________

Simplifica la ecuación y resuélvela para comprobar tu respuesta.

Para conocer más ejemplos de problemas modelados con ecuaciones, pueden ver el programa *Planteamiento de problemas diversos*.

>>> Para saber más

Sobre resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/
Ruta: Aplicaciones → Álgebra → Ecuaciones y sistemas → Resolución de sistemas de ecuaciones
[Fecha de consulta: 8 de octubre de 2008].

Sobre resolución de ecuaciones de segundo grado, consulta:
http://descartes.cnice.mec.es/
Ruta: Aplicaciones → Álgebra → Ecuaciones y sistemas → Ecuación de segundo grado
[Fecha de consulta: 8 de octubre de 2008].
Proyecto Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Conos y cilindros

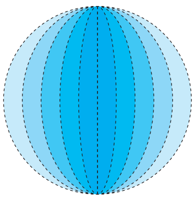
En esta secuencia vas a construir conos y cilindros y estudiarás algunas de sus características. Harás cortes a cilindros y conos rectos y estudiarás las secciones que se obtienen.

SESIÓN 1

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

>>> Para empezar

Los sólidos de revolución

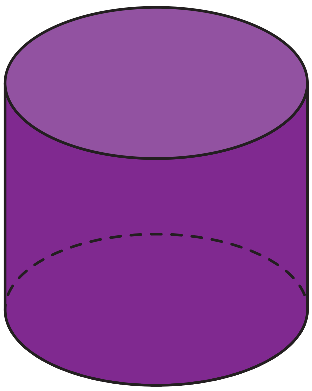


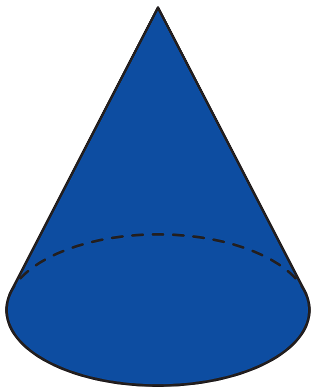
Imagina que haces girar rápidamente un círculo alrededor de uno de sus diámetros, como se muestra en la figura. ¿Qué cuerpo geométrico se genera?

____

>>> Consideremos lo siguiente

Los siguientes cuerpos geométricos también pueden generarse al hacer girar figuras geométricas.





a) ¿Qué figura geométrica usarán y sobre cuál eje la pueden girar para generar un cilindro?

____

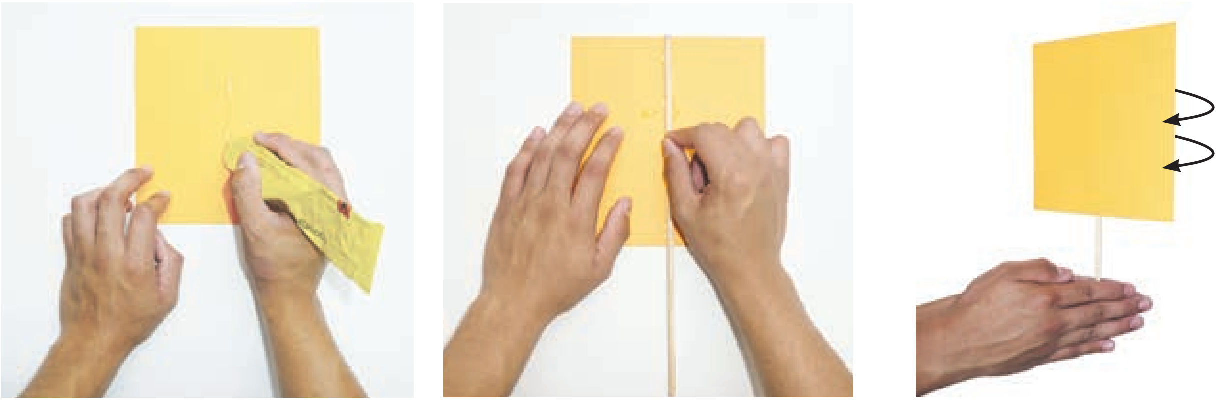
b) ¿Qué figura geométrica usarán y sobre cuál eje la pueden girar para generar un cono?

____

Comparen sus respuestas, observen que hay varias respuestas correctas.

>>> Manos a la obra

I. Recorten un rectángulo de cartulina. Peguen un popote y gírenlo como se observa en la ilustración.



a) ¿Qué cuerpo geométrico se genera? ____________________

b) Si el popote se pega en un lado del rectángulo y se hace girar, ¿en qué se parece y en qué difiere el cuerpo generado con el que se generó en el inciso a)?

____

II. Recorten un círculo, ¿cómo pueden moverlo para generar el mismo cuerpo de la actividad **I**? ____________________

Pista:

El círculo no se gira alrededor de uno de sus diámetros. Se traslada sobre una recta, ¿sobre cuál?

III. Un cono puede generarse al girar un triángulo, anoten ✓ a aquellos casos en los que se genera un cono parecido al de la página 176.

☐ ☐ ☐

>>> A lo que llegamos

Un **cilindro sólido** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un rectángulo gira en torno a uno de sus lados o a un segmento paralelo a ellos. Por tal motivo, es un **sólido de revolución** y se le llama así porque un significado de revolución es vuelta o giro.

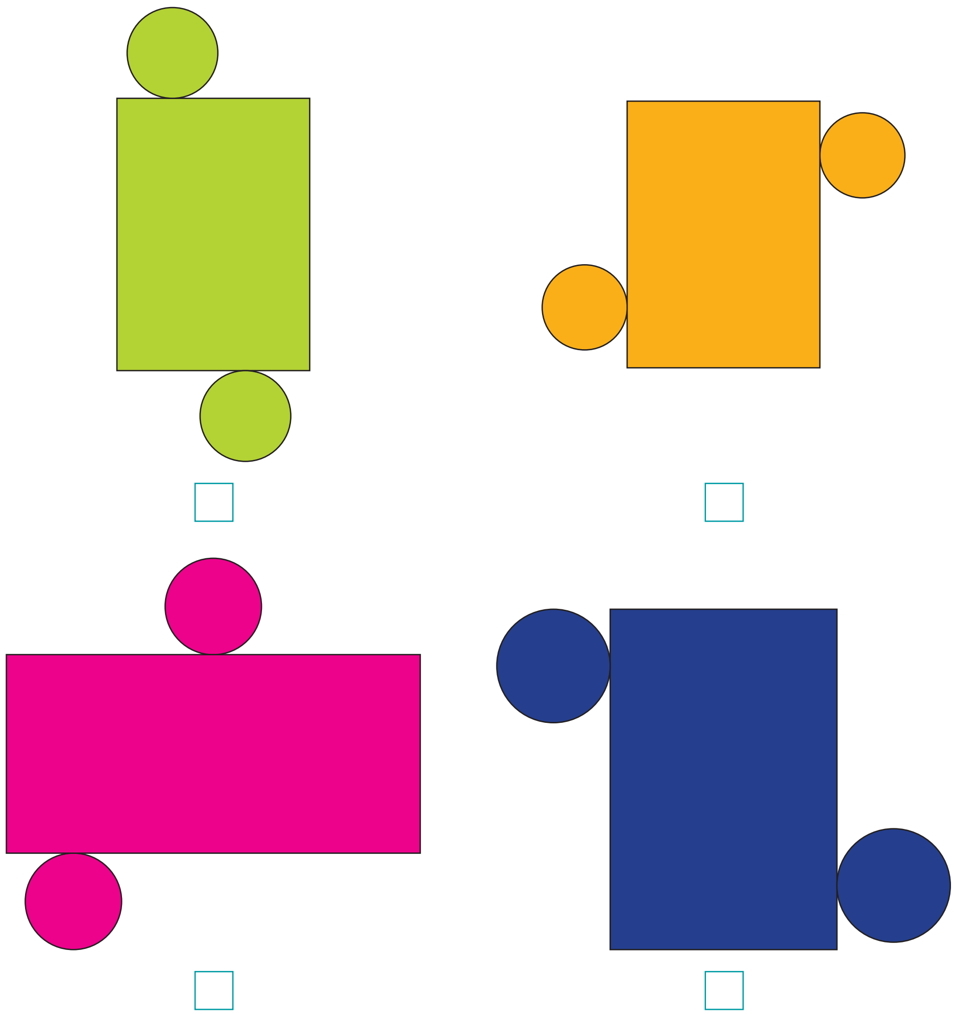
Un **cono sólido** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un triángulo isósceles gira en torno a su eje de simetría. La **esfera** es un cuerpo geométrico que puede generarse cuando un círculo se gira en torno a uno de sus ejes. Por tal motivo, el cono y la esfera también son **sólidos de revolución**.

SESIÓN 2

CILINDROS RECTOS

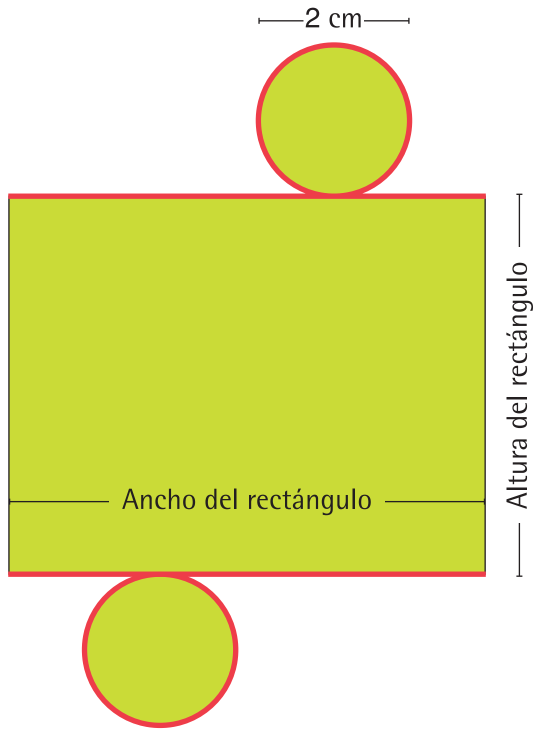
>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ a los desarrollos planos con los que se puede construir un cilindro recto sin que se desperdicie papel. Tomen medidas si lo consideran necesario.



Comparen sus respuestas y comenten con sus compañeros la manera en que determinaron los desarrollos planos correctos.

>>> Manos a la obra



I. Consideren el siguiente desarrollo para armar un cilindro:

a) Observen que la medida del ancho del rectángulo debe coincidir con el perímetro del círculo.

¿Por qué? ____

____

____

____

b) ¿Cuánto mide el perímetro del círculo? ____________

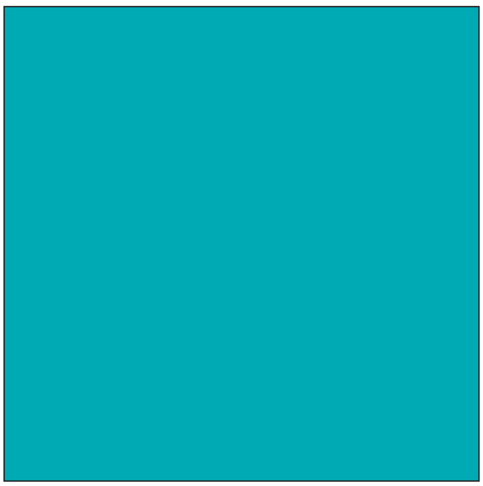
c) Entonces, ¿cuánto debe medir el ancho del rectángulo?

____

d) La altura del rectángulo es también la altura del cilindro. Si se arma el cilindro, ¿cuánto medirá de altura?

____

II. El siguiente cuadrado forma parte del desarrollo plano de un cilindro, termínenlo trazando sus bases. Para determinar el diámetro de las circunferencias hagan los cálculos necesarios.

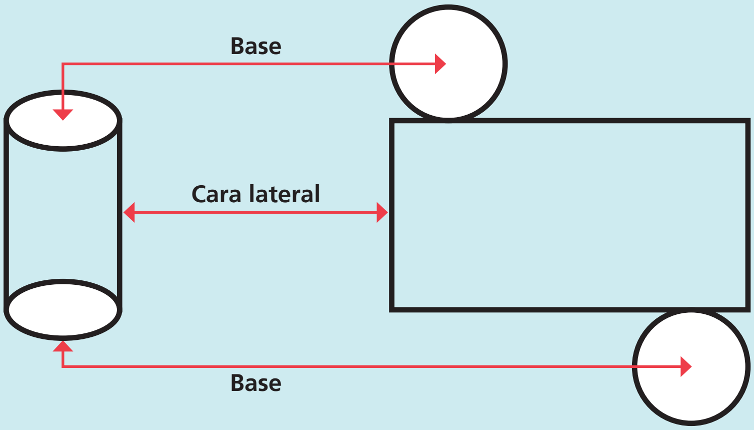


III. Armen con cartulina un cilindro que mida 12 cm de altura y 5 cm de radio en sus bases. Guarden su cilindro porque lo van a ocupar en la siguiente secuencia.

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

>>> A lo que llegamos

El desarrollo plano del cilindro está formado por dos caras circulares llamadas **bases** y una **cara lateral** que es un rectángulo.



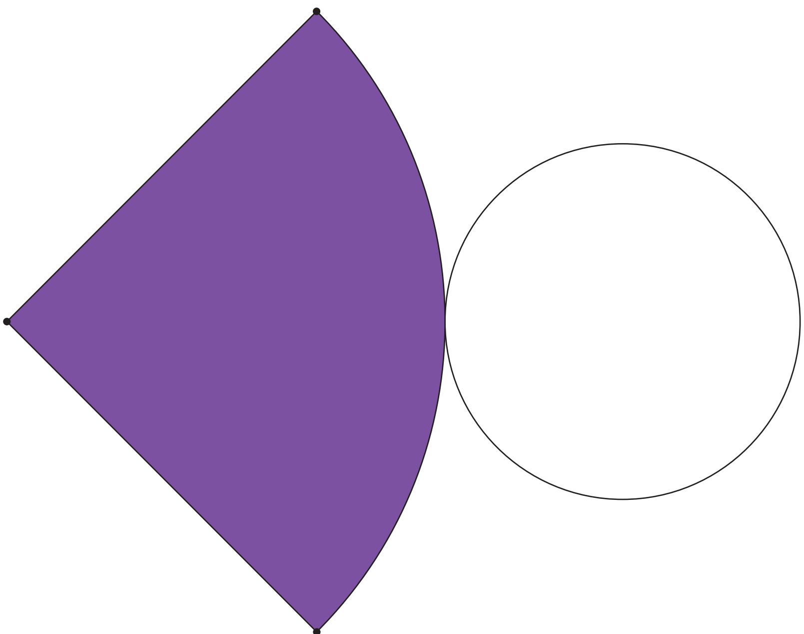
La medida del ancho del rectángulo es $2\pi r$, donde r es el radio de la base; la medida de la altura del rectángulo es la medida de la altura del cilindro.

SESIÓN 3

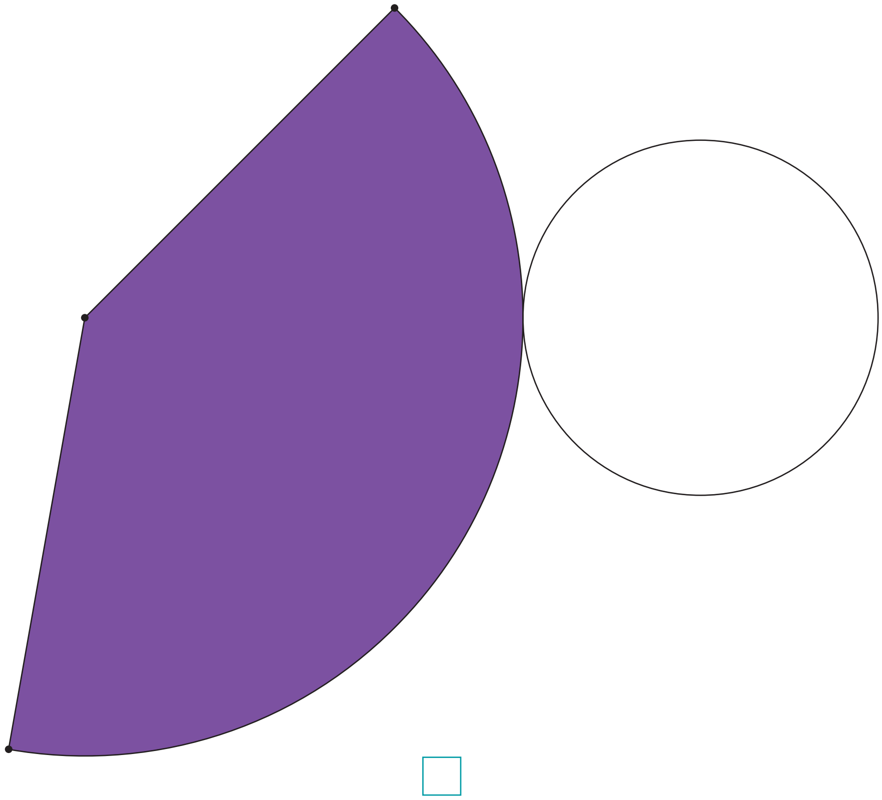
CONOS RECTOS

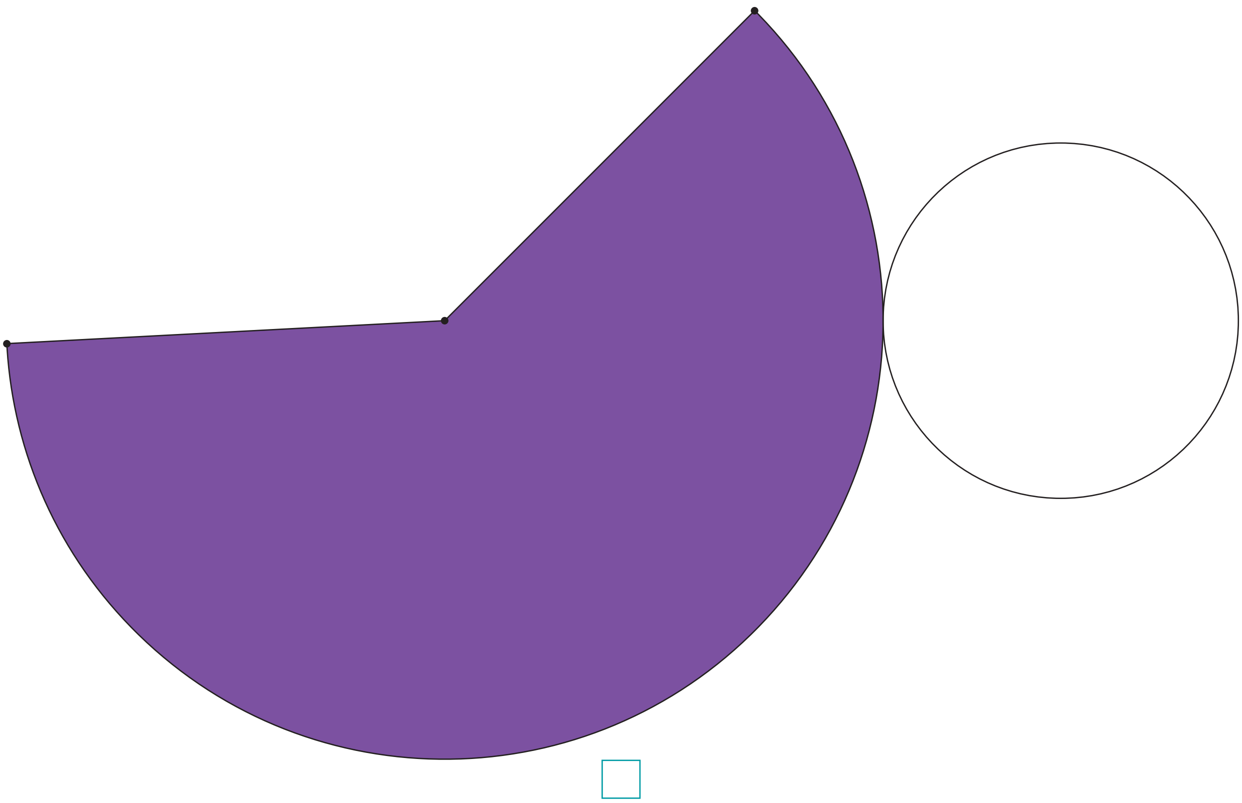
>>> Consideremos lo siguiente

Anoten ✓ a los desarrollos planos con los que se puede construir un cono recto sin que se desperdicie papel.



☐

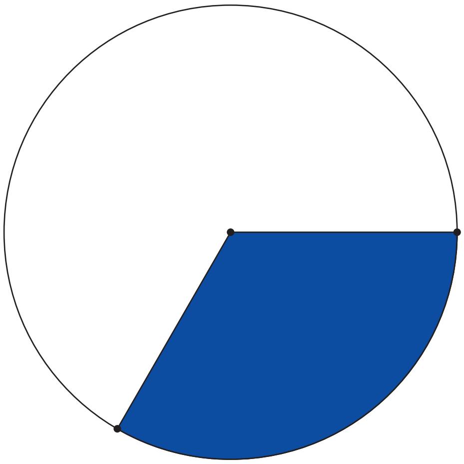




Comparen la manera en que llegaron a sus resultados. Si en alguno tienen duda pueden calcar el desarrollo y tratar de armar el cono.

>>> Manos a la obra

I. Consideren la siguiente circunferencia de 3 cm de radio y el sector circular azul que abarca un ángulo central de 120°.



a) ¿Cuánto mide la circunferencia? ____________

b) ¿Qué parte de la circunferencia completa es el arco del sector circular? ____________

c) ¿Cuánto mide la longitud del arco del sector circular?

____

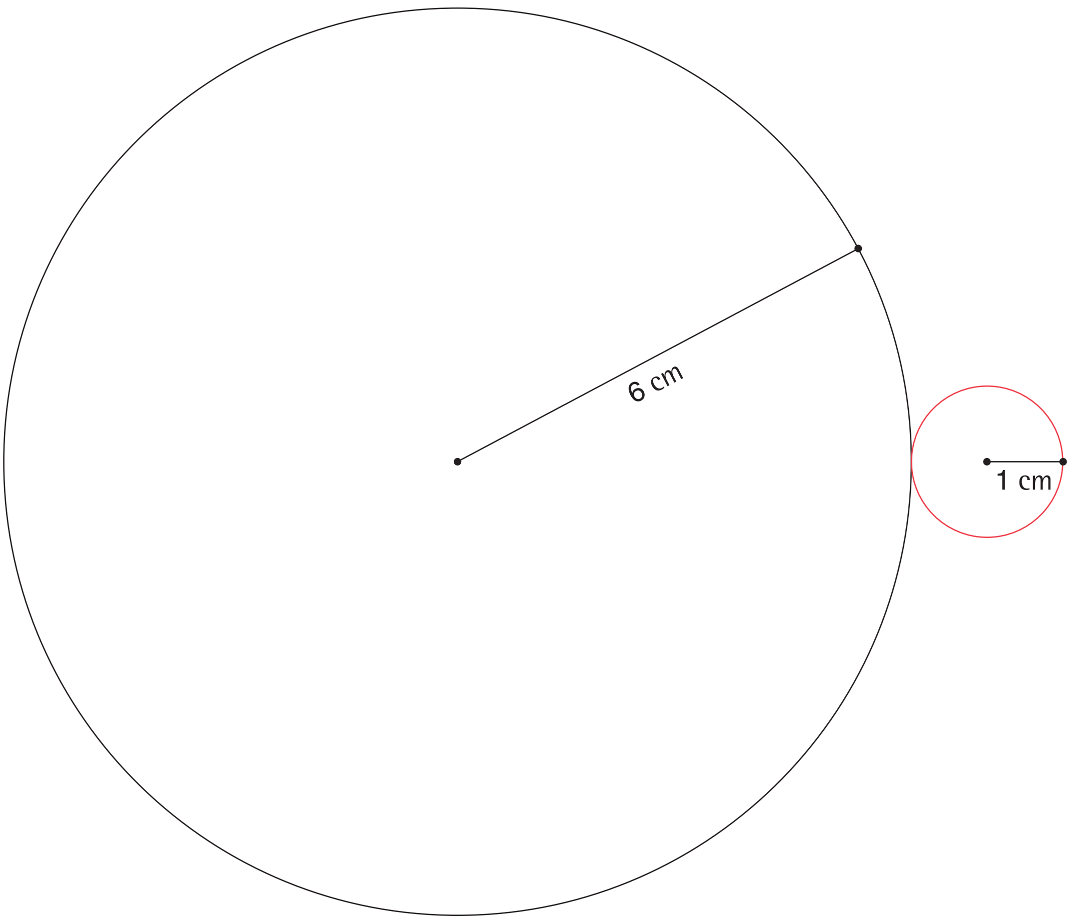
d) Si el sector circular es la cara lateral de un cono, ¿cuánto debe medir el perímetro de la base del cono?

____

e) ¿Cuánto debe medir el radio de la base del cono?

____

II. El círculo rojo es la base de un cono y su radio mide 1 cm.



En la circunferencia grande van a terminar de trazar el sector circular que será la cara lateral del cono; para determinar el ángulo de ese sector circular contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el perímetro de la base del cono? ____________

b) ¿Cuánto debe medir el arco del sector circular que será la cara lateral del cono? ____________

c) ¿Cuánto mide el perímetro de la circunferencia grande? ____________

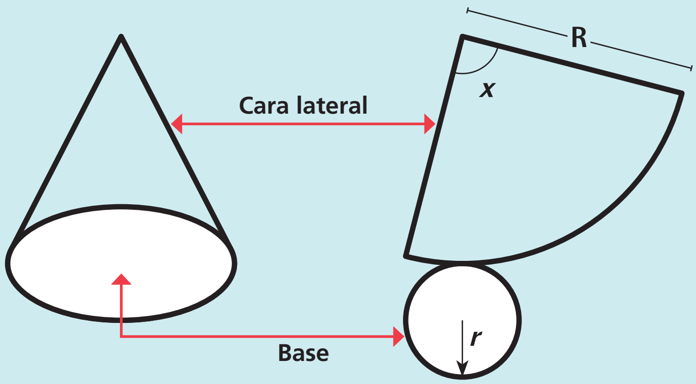
d) ¿Qué parte del perímetro de la circunferencia grande es la medida del arco del sector circular? ____________

e) ¿Cuánto debe medir el ángulo del sector circular? ____________

Tracen el sector circular.

>>> A lo que llegamos

El desarrollo plano del cono está formado por una cara circular llamada **base** y una **cara lateral** curva que es un sector circular.



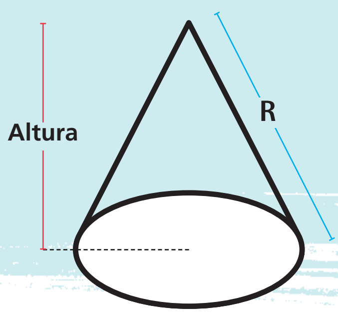
Si consideramos **R** al radio del sector circular que forma la cara lateral del cono y r al radio de la base del cono, para calcular el ángulo del sector circular (x) se establece la siguiente proporción:

$2\pi R$ corresponde a $360°$
$2\pi r$ corresponde a $x°$

o bien $$\frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{360°}{x°}$$

De donde se tiene que:

$$x = \frac{2\pi r \times 360°}{2\pi R}$$



Es importante que observes que la altura del cono es diferente de la medida R.

Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen que el desarrollo plano que eligieron tiene las medidas correctas para **R**, ***r*** y para ***x***.

>>> Lo que aprendimos

Pista:

Para calcular el radio del sector circular pueden usar el teorema de Pitágoras.

Construyan un cono que mida 12 cm de altura y 5 cm de radio en la base. Guarden su cono porque lo utilizarán en la siguiente secuencia.

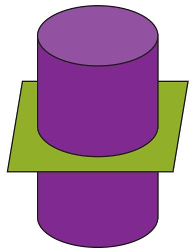
Una gran variedad de empaques y objetos tienen formas de cilindros o de conos. Puedes ver el programa *Cilindros y conos* para conocer algunos ejemplos.

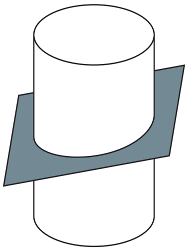
SESIÓN 4

SECCIONES DE CORTE

>>> Manos a la obra

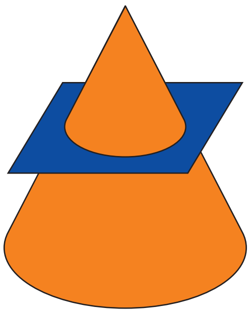
I. Cuando cortan un cilindro con un plano paralelo a la base, en la sección de corte se forma un círculo.

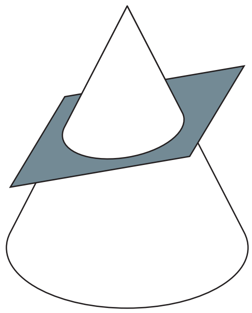


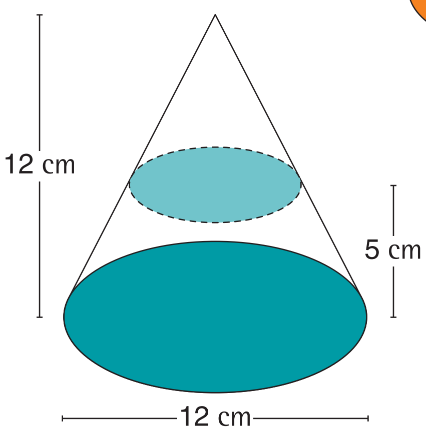


Imaginen que con una tarjeta se corta un cilindro de plastilina como se indica en la figura de la izquierda. Dibujen en su cuaderno cómo se imaginan la figura geométrica que queda en la sección de corte.

II. Dibujen en su cuaderno la figura que se formará en la sección de corte de cada cono.



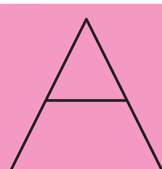




III. La figura de la izquierda ilustra un cono al que se le hizo un corte formando, en la sección de corte, un círculo. ¿Cuál es el radio de ese círculo? __________

Pista:

Pueden utilizar semejanza de triángulos.

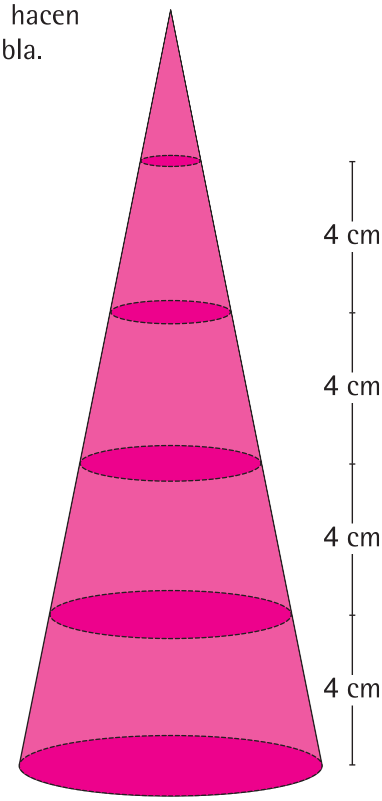


IV. Consideren una esfera de plastilina a la que se le harán diversos cortes.

a) ¿Es posible formar un óvalo al hacer un corte a la esfera? ____________

b) ¿Dónde hay que cortar para obtener el círculo de radio máximo? ____________

V. Consideren que el cono tiene una base con radio 8 cm y altura 20 cm y se hacen cortes paralelos a la base donde indican las líneas punteadas. Completen la tabla.



Círculo	Columna A Distancia del vértice superior a la sección de corte	Columna B Radio del círculo de la sección de corte	Columna C Área del círculo de la sección de corte
1	4 cm		
2	8 cm		
3	12 cm		
4			

a) ¿Son proporcionales las cantidades de la columna A con respecto a las cantidades de la columna B? ______ . Justifiquen su respuesta ________

____

b) ¿Son proporcionales las cantidades de la columna B con respecto a las cantidades de la columna C? ______ . Justifiquen su respuesta ________

____

VI. Llenen un cono poco a poco de agua. Colóquenlo de tal manera que la base esté paralela al piso.

a) ¿Qué forma se genera en la superficie superior del agua?

____

b) Tracen en su cuaderno la gráfica que representa la relación del nivel del agua con el radio del círculo correspondiente a cada corte.

Comparen sus respuestas y argumentos con sus compañeros de grupo.

>>> Para saber más

Sobre conos y cilindros, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Peña, José Antonio de la. "Los geómetras griegos" en *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2004.

Volumen del cono y del cilindro

En esta secuencia aprenderás la fórmula para calcular el volumen del cono y del cilindro.

SESIÓN 1

TINACOS DE AGUA

>>> Para empezar

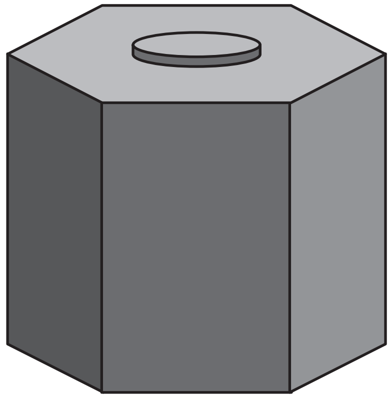
En primer grado aprendiste que para calcular el volumen de un prisma se multiplica el área de la base por la altura. Considera que la figura de la derecha es un tinaco de agua, ¿cómo calcularías la cantidad de agua que le cabe?

____

____

____

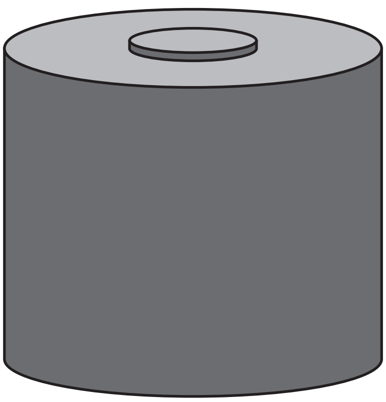
____



>>> Consideremos lo siguiente

¿Cuántos litros de agua puede almacenar un tinaco en forma de cilindro cuya base tiene un radio 0.40 m y su altura mide 1 m? ____________

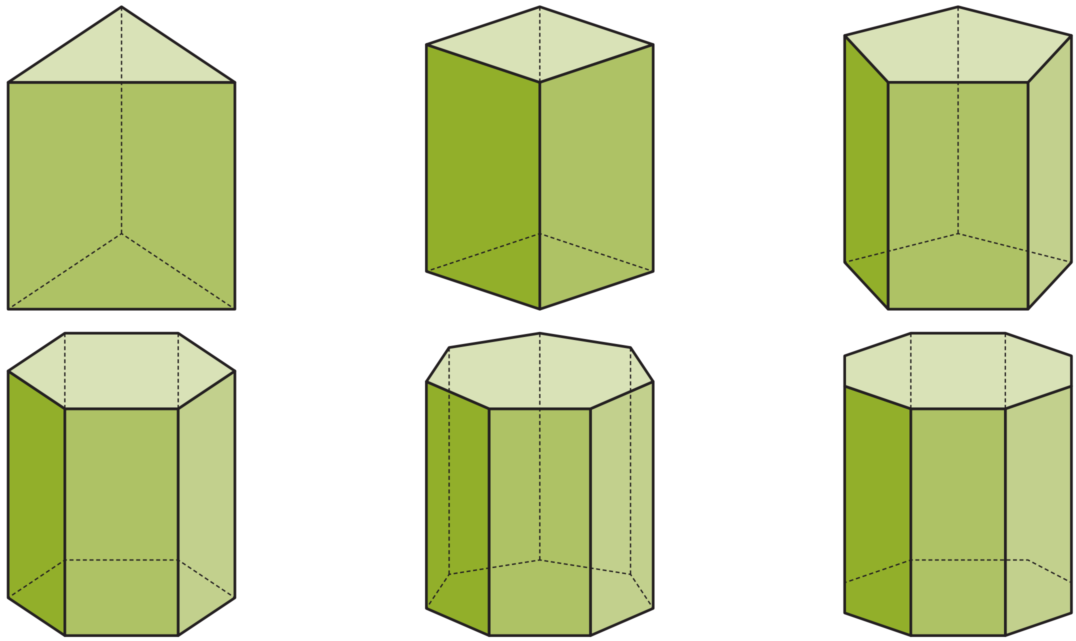
Recuerden que:
Un decímetro cúbico equivale a un litro.



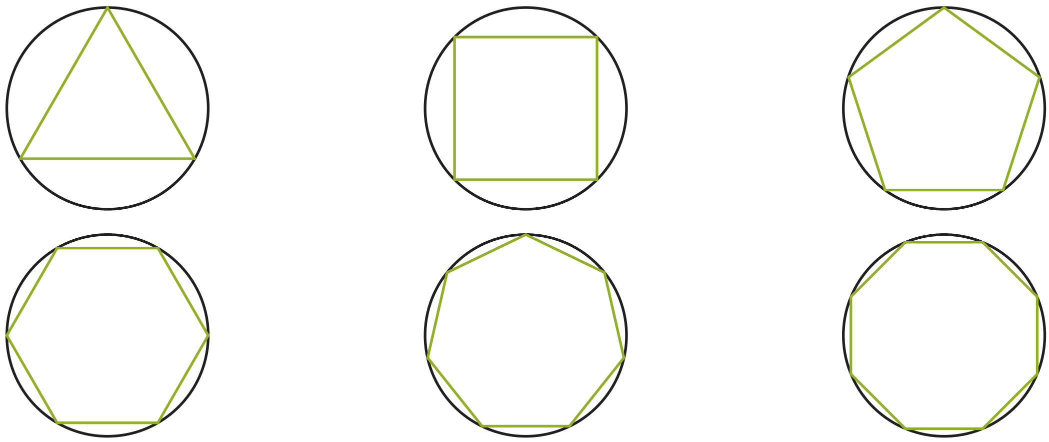
Comenten con sus compañeros la manera en que calcularon la capacidad del tinaco en forma de cilindro.

>>> Manos a la obra

I. Considera los siguientes prismas:



a) Si se continúa aumentando el número de lados de la base, ¿a qué figura geométrica tiende a parecerse la base? ______



b) Si se continúa aumentando el número de lados de la base, ¿a qué cuerpo geométrico tiende a parecerse un prisma? ______

c) El volumen de un cilindro puede calcularse con la fórmula para calcular el volumen de un prisma, considerando que la base es un círculo. ¿Cuál de las siguientes fórmulas sirve para calcular el volumen del cilindro de radio $\boldsymbol{r}$ y de altura $\boldsymbol{h}$?

$V = \pi \times \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{h}$ $V = \pi \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{h}$ $V = \pi \times \boldsymbol{r}^2 \times \boldsymbol{h}$

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

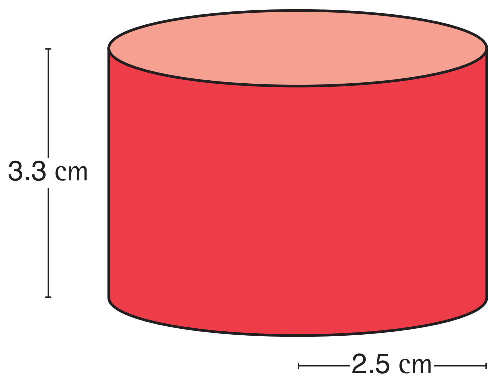
>>> A lo que llegamos

Para calcular el volumen de un cilindro, al igual que el de un prisma, se multiplica el área de su base por su altura. Dado que la base de un cilindro siempre es un círculo, el volumen se calcula multiplicando el valor de π por el radio al cuadrado y por la altura.

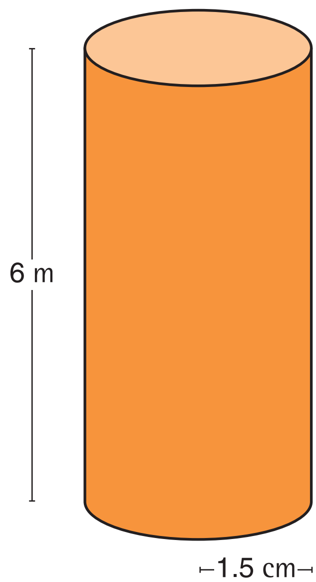
Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen que calcularon correctamente la capacidad el tinaco.

>>> Lo que aprendimos

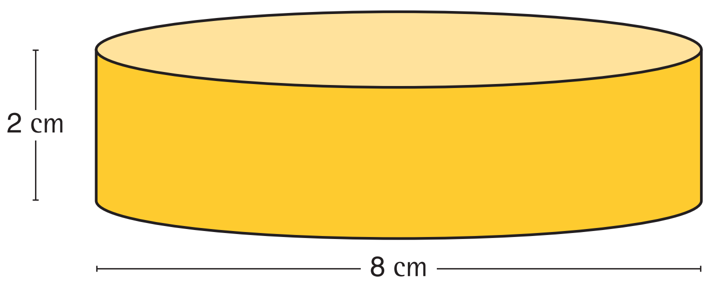
Calcula el volumen de los siguientes cilindros.



Volumen ______________



Volumen ______________



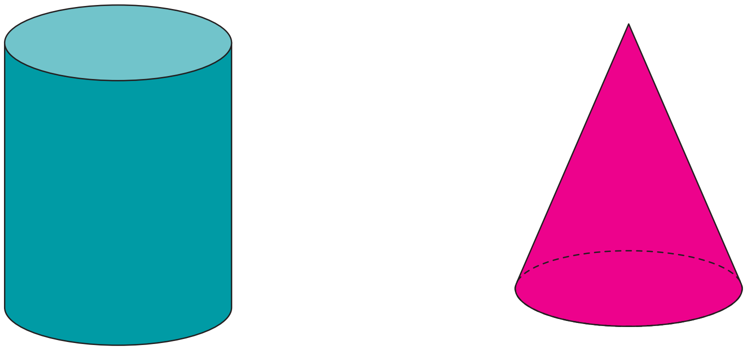
Volumen ______________

CONOS DE PAPEL

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Considera un cilindro y un cono que tienen exactamente la misma medida de la base y la altura.



¿Cuál tiene mayor volumen? ____________

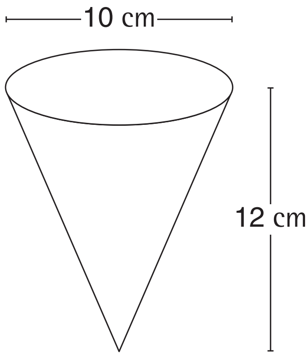
¿Cuántas veces más volumen crees que tenga? ____________

>>> Consideremos lo siguiente

¿Qué cantidad de agua consideran que le cabe a un cono de papel con las medidas indicadas? ____________

Pista:

Recuerden la relación entre el volumen del prisma y de la pirámide.



Recuerden que:

Un decímetro cúbico ***(dm³)*** *equivale a un litro* ***(l)****.*

Comparen sus procedimientos y resultados con los de otros equipos.

>>> Manos a la obra

I. Utilicen el cilindro y el cono que construyeron en la secuencia 27 de **Matemáticas III**, volumen II, quiten una de las bases del cilindro y la base del cono y hagan lo siguiente:

Paso 1. Llenen el cono de arroz o de semillas pequeñas.

Paso 2. Vacíen el contenido en el cilindro

Paso 3. Repitan lo anterior hasta que se llene el cilindro.

a) ¿Cuántas veces es mayor el volumen del cilindro que el del cono? ____________

b) Si conocen el radio de la base del cono y su altura, ¿cómo calculan su volumen?

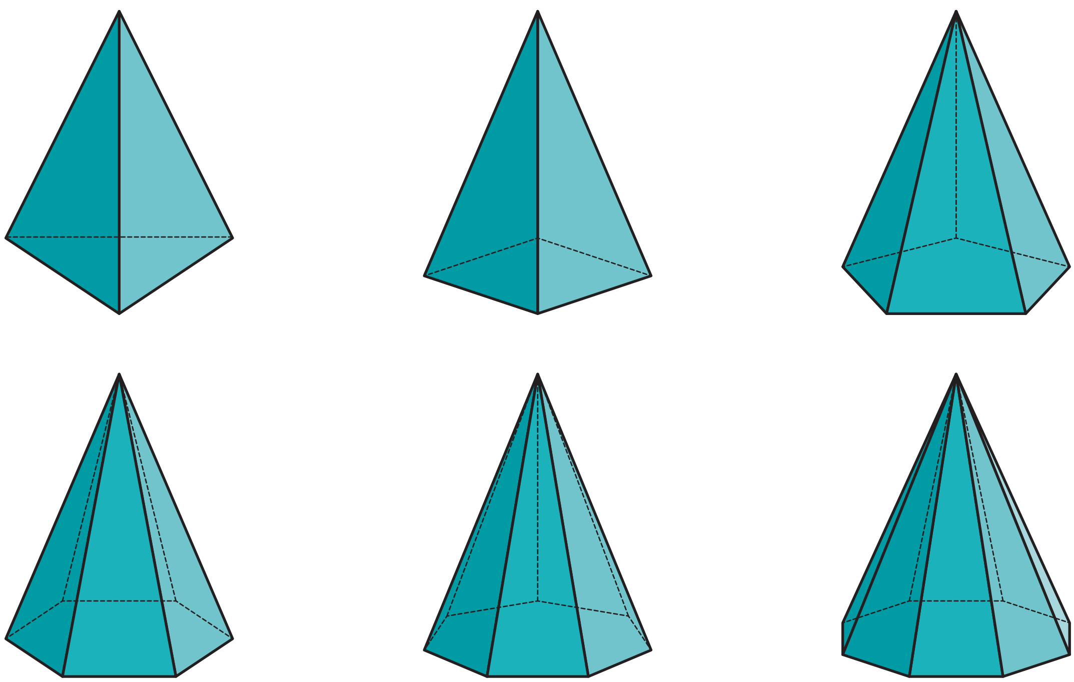
____

____

____

____

II. Consideren las siguientes pirámides:



a) Si se continúa aumentando el número de lados de la base, ¿a qué figura geométrica tiende a parecerse la base? ______________________

b) El volumen de un cono puede calcularse con la fórmula para calcular el volumen de una pirámide, considerando que la base es un círculo. ¿Cuál de las siguientes fórmulas sirve para calcular el volumen del cono?

$V = 3\pi \times r^2 \times h$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3}\pi \times r \times h$ $\qquad$ $V = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$

c) Verifiquen que coincide con su respuesta al inciso b) de la actividad **I**.

>>> A lo que llegamos

Volumen de conos y cilindros

El volumen de un cono, al igual que el de una pirámide, es la tercera parte del área de su base por su altura. Dado que la base de un cono siempre es un círculo, el volumen se calcula multiplicando el valor de π por el radio al cuadrado y por la altura, y el resultado se divide entre tres.

Regresen al problema del apartado *Consideremos lo siguiente* y verifiquen que calcularon correctamente el volumen del cono.

>>> Lo que aprendimos

1. Calcula el volumen de un cono que mide 2 m de altura y $\frac{3}{4}$ m de radio.

2. Anota las medidas de un cono que tenga el mismo volumen que un cilindro cuyo radio mide 4 y altura 9 cm.

>>> Para saber más

Sobre el volumen de conos y pirámides, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Hernández Garcíadiego, Carlos. "Volumen del cilindro", "Volumen de conos y pirámides" en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Estimar volúmenes

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen estimar y calcular volúmenes de cilindros y conos.

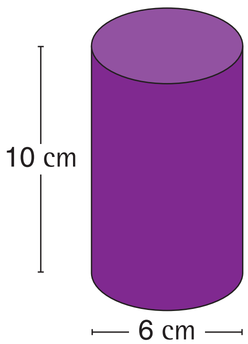
SESIÓN 1

PROBLEMAS PRÁCTICOS

>>> Lo que aprendimos

Estimar volúmenes

I. Primero, estimen el resultado aproximado de los siguientes problemas.

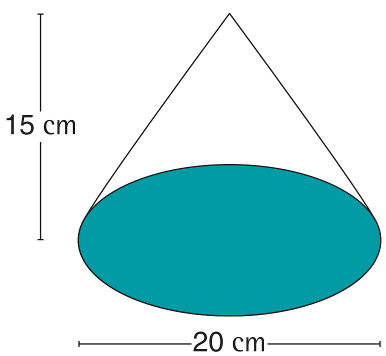


a) ¿Cuál es la capacidad en mililitros de una lata de jugo con las medidas indicadas a la izquierda? ____________

b) Anoten la medida del radio y la altura de un envase cilíndrico con capacidad para un litro. ____________

c) Don Fernando necesita un tinaco cilíndrico para almacenar 2 000 litros de agua; el señor de la tienda le ofrece uno que mide 1 m de diámetro, ¿cuál es la altura mínima del tinaco para que almacene lo que requiere don Fernando? ____________

d) Carlos cortó un triángulo rectángulo que mide 10 cm de hipotenusa y su cateto menor mide 6 cm. Si lo hace girar uno de sus catetos se genera un cono. ¿Cuál cono tiene mayor volumen: el que se genera cuando se gira sobre su cateto mayor o el que se genera cuando se gira sobre su cateto menor? ____________



e) ¿Cuánto tendría que medir la altura de un cono con una base de 5 cm de radio para tener el mismo volumen que el de la izquierda? ____________

f) Un chapoteadero (alberca para niños pequeños), en forma de cilindro, tiene una base de 2 m de radio y quiere llenarse hasta que el agua alcance $\frac{1}{2}$ m de altura. Si el agua se suministra con tres mangueras que arrojan 5 *l* de agua por minuto cada una, ¿en cuánto tiempo el agua alcanzará la altura deseada? __________

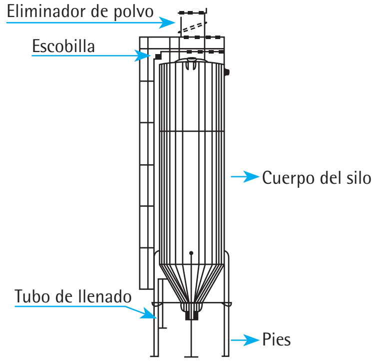
g) ¿Cuál es la altura de un cono al que le caben 250 ml de agua si el radio de su base mide 3 cm? ____________

h) ¿Cuál es el radio de un vaso en forma de cilindro al que le caben 400 ml de agua si su altura es de 12 cm? ____________

i) Consideren la siguiente información:

Los silos de cemento son elementos verticales, formados por un cilindro y un cono. Los silos se caracterizan, generalmente, por el tonelaje almacenado, su volumen varía entre los 15 y 50 m^3 y su diámetro varía de 2.40 a 2.80 m.

Vean una foto y un dibujo de un silo de cemento:



Si se desea que el silo tenga un volumen de 25 m^3 y un diámetro de 2.5 m para el cilindro y el cono, ¿cuáles pueden ser las posibles alturas del cono y del cilindro?

____________ y ____________

Comparen sus estimaciones con las de otras parejas. Aún no es necesario que hagan cálculos para saber qué estimaciones son mejores.

II. Haciendo operaciones escritas o con la calculadora, encuentren el resultado de los problemas anteriores. Anótenlo al lado de sus estimaciones. Para el caso del problema d) comprueben su respuesta calculando el volumen de ambos conos.

Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. Si alguna pareja hizo una estimación muy buena pídanle que compartan su estrategia.

Para conocer más acerca de cómo se aplican las fórmulas del volumen del cilindro y del cono, pueden ver el programa *Problemas prácticos*.

>>> Para saber más

Sobre volumen y capacidad, consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Peña, José Antonio de la. "¿Cuánta agua le cabe a un tinaco?" en *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2004.

Gráfica cajabrazos

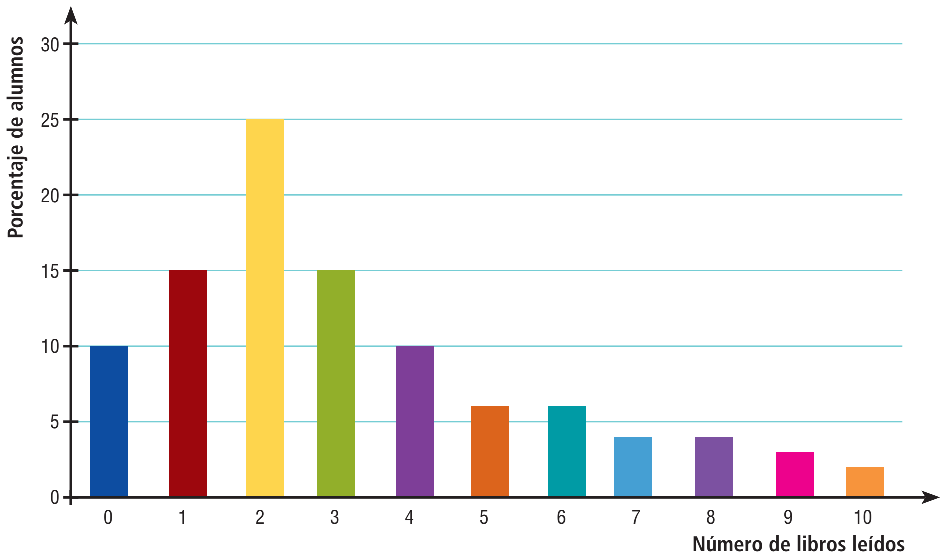
En esta secuencia, aprenderás a interpretar y construir un nuevo tipo de gráfica estadística llamada cajabrazos que se construye a partir de la mediana.

SESIÓN 1

INTERPRETACIÓN DE DATOS

>>> Para empezar

I. La siguiente gráfica muestra los resultados de una encuesta en la que se planteó la siguiente pregunta a alumnos de tercero de secundaria: ¿Cuántos libros completos has leído en los últimos doce meses, sin tomar en cuenta tus libros de texto?



Gráfica 1

¿Cuántos libros completos has leído en los últimos doce meses, sin tomar en cuenta tus libros de texto?

a) De acuerdo con la gráfica, ¿cuántos libros ha leído un mayor porcentaje de alumnos? __________

b) ¿Cuál fue el menor número de libros leídos? ____________ . ¿Cuál fue el mayor? ____________

c) La gráfica muestra que 10% de los alumnos no leen ningún libro, ¿qué porcentaje de los alumnos leen 2 o menos libros? ____________

d) ¿Qué porcentaje de alumnos es mayor: el que ha leído 5 o menos libros, o el que ha leído 5 o más? ______________________

e) En el eje horizontal de la gráfica 1 se muestran, ordenados de menor a mayor, el número de libros leídos por los alumnos encuestados, ¿entre cuáles de esos números se halla el valor de la mediana?

____

f) Si suman en orden el porcentaje de los alumnos que han leído 0, 1, 2 o más libros completos, ¿en cuál número de libros se alcanza el 75% de los alumnos? _________

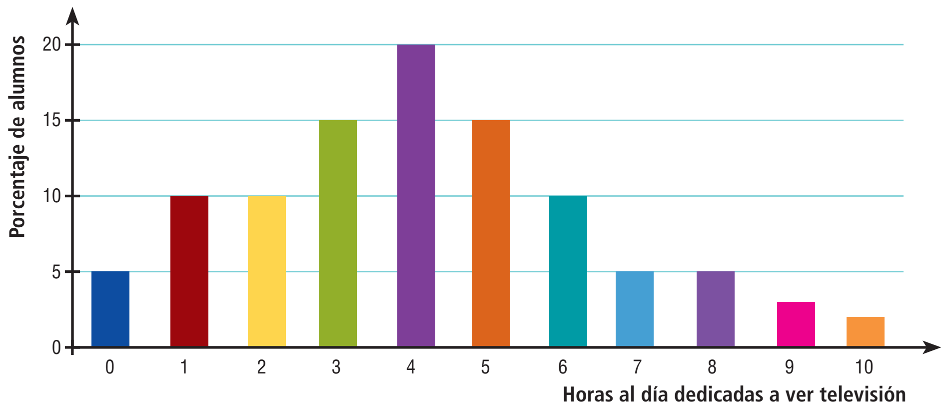
Recuerda que:

La mediana es una de las medidas de tendencia central, y se define como el valor que ocupa la posición central cuando los datos se ordenan de menor a mayor. Por lo tanto, la mediana divide los datos ordenados en dos conjuntos de igual número de datos.

Comparen sus respuestas a las preguntas anteriores y contesten las siguiente pregunta: si el número total de alumnos encuestados hubiera sido 200, ¿cuántos alumnos leyeron 2 o menos libros completos?

____

II. Otra de las preguntas que debían contestar los alumnos encuestados era: ¿Cuántas horas de tu tiempo libre inviertes en ver televisión al día? Los resultados a esta pregunta se muestran en la gráfica 2.



Gráfica 2

¿Cuántas horas de tu tiempo libre inviertes en ver televisión al día?

a) ¿Qué porcentaje de los alumnos no ven la televisión? _________

b) ¿Cuál es el número de horas que mayor porcentaje de los alumnos invierten en ver televisión al día? ________ . ¿Qué cantidad de alumnos representa? ________

c) Si ordenas al total de alumnos encuestados en cuatro grupos (cada uno sería el 25%), empezando por los que no ven la televisión hasta los que la ven más tiempo, señala con una ✓ cuántas horas al día ve televisión el primer 25% de los alumnos.

☐ De 0 a 2 horas ☐ De 0 a 4 horas ☐ De 0 a 3 horas ☐ De 0 a 1 horas

d) Señala con una ✓ cuántas horas al día ve televisión el último 25% de los alumnos.

☐ 9 o más horas ☐ 8 o más horas ☐ 7 o más horas ☐ 6 o más horas

e) Señala con una ✓ cuántas horas al día ve televisión el 75% de los alumnos.

☐ Entre 0 y 6 horas ☐ Entre 0 y 5 horas ☐ Entre 0 y 4 horas ☐ Entre 0 y 7 horas

f) ¿Qué porcentaje de los alumnos ve televisión de 3 a 5 horas al día? ____________

Comparen sus respuestas y realicen lo siguiente:

Consideren la información que se muestra en las gráficas de las dos actividades anteriores y, nuevamente, supongan que fueron 200 alumnos encuestados .

Ante la pregunta: ¿Cuántos libros completos has leído en los últimos doce meses, sin tomar en cuenta tus libros de textos?

a) ¿Cuántos alumnos están en el primer 25%? ____________

b) ¿Cuál es el número de libros leídos que corresponde al primer 25%? ____________

En la pregunta: ¿Cuántas horas de tu tiempo libre inviertes en ver televisión al día?

c) ¿Cuántos alumnos están en el primer 25%? ____________

d) ¿Cuál es el número de horas al día dedicadas a ver televisión que corresponde al primer 25%? ____________

Para saber más acerca de las distintas maneras en que se pueden interpretar los datos, pueden ver el programa *Interpretación de datos*.

SESIÓN 2

CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA CAJABRAZOS

>>> Para empezar

En las sesión 3 ¿Qué cantidad de agua consumes? de la secuencia 7 **Diseño de estudios y experimentos estadísticos** del libro **Matemáticas III**, volumen I, investigaste qué cantidad de agua consume el grupo diariamente y si es la que requieren de acuerdo con su edad. En esta sesión utilizarás nuevamente los datos que se recolectaron.

>>> Consideremos lo siguiente

Observen la cantidad de agua en mililitros que consumen diariamente los 20 alumnos de un grupo:

1 650, 1 300, 2 400, 2 000, 2 100, 1 700, 1 900, 1 500, 1 900, 1 850, 2 000, 2 150, 2 300, 1 600, 1 900, 2 500, 2 200, 1 650, 2 100, 1 750.

¿Qué conjunto de datos tiene mayor variedad: el que corresponde a los alumnos que consumen diariamente menos de 2 000 ml de agua o el de los alumnos que consumen diariamente 2 000 ml o más?

Expliquen cómo determinaron su respuesta. ____________________

____

____

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas.

a) De acuerdo con los datos registrados en ese grupo, ¿cuál es la menor cantidad de agua que se consume diariamente? __________ . ¿Y cuál es la mayor? __________

b) ¿Cuál es la diferencia que hay entre la mayor y la menor cantidad de agua registrada? __________

c) Ordenen de menor a mayor las cantidades de agua en ml que consume diariamente ese grupo de alumnos. Anótenlas en las siguientes celdas.

d) Tracen una línea vertical de color rojo que divida los datos en dos partes iguales. ¿Cuál es el valor de la mediana de las cantidades de agua (en ml) que consumen diariamente ese grupo de alumnos? __________

e) ¿Qué porcentaje del total de cantidades de agua en ml que se registraron representa las cantidades de agua que son menores al valor de la mediana? __________ ¿Y qué porcentaje representa las que están por arriba de la mediana?

____

f) Ahora, tracen otras dos líneas verticales de color verde, de modo que una divida la primera mitad de datos en dos partes iguales y la otra haga lo mismo con la segunda mitad de datos. ¿Qué porcentaje de cantidades representa cada una de esas cuatro partes? __________

g) ¿Cuál es el valor de la media de las cantidades de agua que consumen diariamente esos 20 alumnos? __________

Recuerden que:

Cuando el número de datos de un conjunto es impar, la mediana será exactamente el valor central del conjunto.

Si el número de datos de un conjunto es par, la mediana será exactamente el valor que se encuentra a la mitad de los dos datos centrales del conjunto.

Por ejemplo, encontrar la mediana del conjunto de datos:

2, 9, 11, 5, 6, 27.

El conjunto tiene 6 datos.

Ordenar de menor a mayor:

2, 5, 6, 9, 11, 27

Los dos datos centrales son:

6 *y* 9.

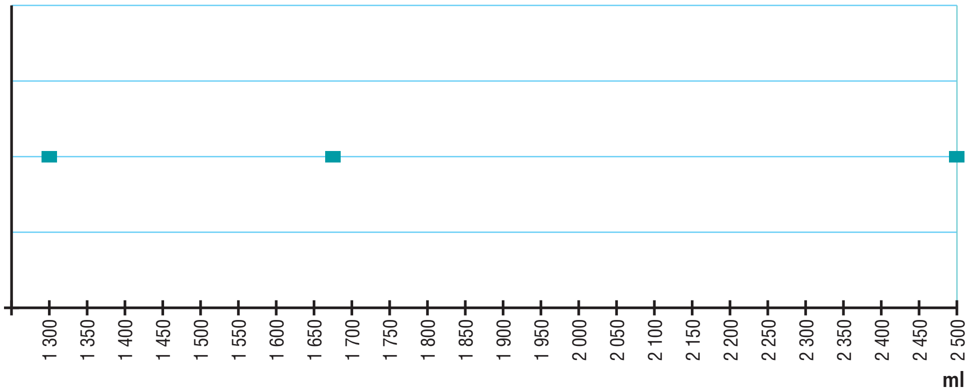
El valor intermedio es:

$$\frac{(6+9)}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

que corresponde al valor de la mediana.

II. En la gráfica 3 se han ubicado, a la misma altura, tres puntos:

- El primer punto muestra la menor cantidad de consumo de agua que se registró en ese grupo.
- El segundo muestra el valor hasta donde llega el primer 25% de los datos registrados en orden ascendente.
- El tercero representa la mayor cantidad de consumo de agua registrada.

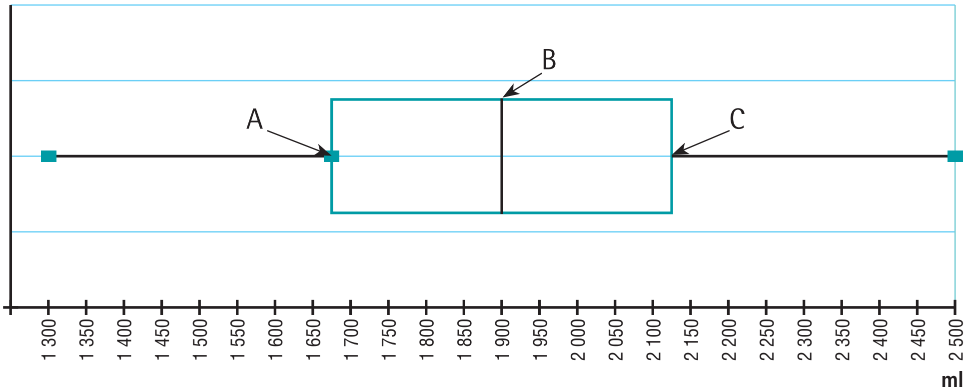


Gráfica 3

a) Ubiquen los siguientes puntos a la misma altura de los otros:

- El que represente la mediana de las cantidades de agua que consumen esos alumnos.
- Y otro punto que muestre el valor donde se alcanza 75% de los datos registrados en orden ascendente.

b) En la siguiente gráfica, anoten qué representan los valores señalados con las letras A, B, C.



Gráfica 4

A: ____________ B: ____________ C: ____________

y compárenlo con el valor de la mediana, ¿se encuentran en el mismo lugar?

____

>>> A lo que llegamos

Una gráfica cajabrazos es una representación que divide en cuatro partes el total de datos.

Primer paso: se determina el valor de la mediana (Me) y, a partir de él, se forman dos grupos de datos: la primera mitad (de 0 a 50% de los datos) y la segunda mitad (de 51% a 100%).

Segundo paso: cada mitad se divide en dos grupos, en los que se identificará también su mediana. Cada grupo corresponde a un 25% de los datos.

Tercer paso: se identifican el valor más pequeño de los datos que es el extremo inferior y el valor más grande que es el extremo superior.

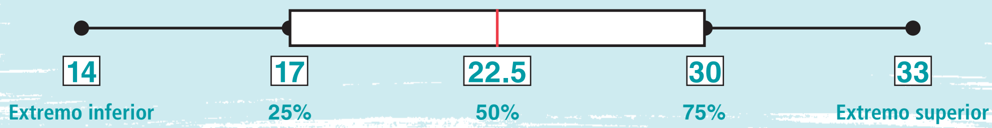
Ejemplo:

Primera mitad | mediana | Segunda mitad

14 16 16 17 17 19 20 22 22 | 22.5 | 23 25 26 27 30 30 31 31 33

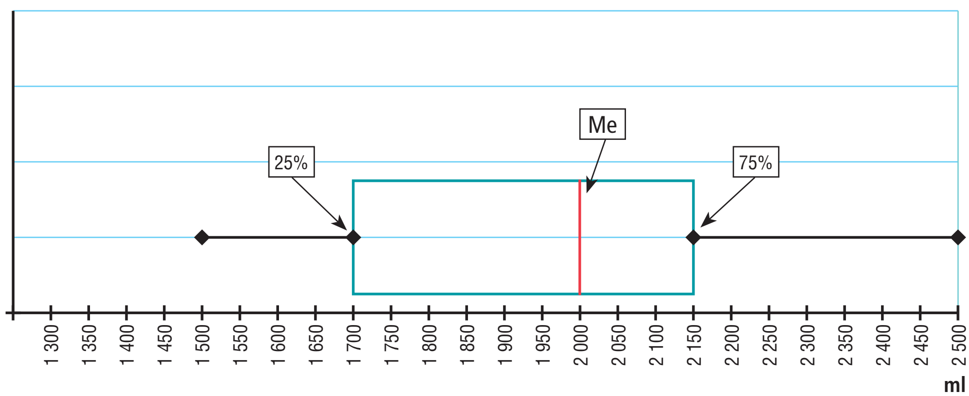
1er cuarto | 2do cuarto | | 3er cuarto | 4to cuarto

25% | 50% | 75% | 100%



En el programa *Gráfica cajabrazos*, se muestra un esbozo del análisis exploratorio de datos, la cual es una nueva tendencia de la estadística.

III. La siguiente gráfica cajabrazos muestra las cantidades de agua (en ml) que consumen diariamente las 11 mujeres que integran el grupo considerado en el apartado *Consideremos lo siguiente*.



Gráfica 5

a) De acuerdo con la gráfica 5, ¿cuántas mujeres consumen entre 1 500 ml y 1 700 ml de agua diariamente? ____________

b) ¿Qué cantidad de agua consume diariamente el primer 50% de mujeres? ____________

c) ¿Qué porcentaje de las mujeres consumen entre 1 650 ml y 2 150 ml de agua diariamente? ____________

d) Anoten en sus cuadernos una conclusión acerca de la distribución de la cantidad de agua que consumen diariamente esas mujeres. Comparen sus conclusiones.

>>> Lo que aprendimos

1. Los siguientes datos corresponden a los precios de la tortilla registrados el día 31 de enero de 2007 en diferentes ciudades del país.

Estado	Ciudad	Precio
Aguascalientes	Aguascalientes	$ 10.00
Baja California	Mexicali	$ 12.00
Baja California Sur	La Paz	$ 10.00
Campeche	San Francisco de Campeche	$ 9.50
Colima	Colima	$ 8.50
Chiapas	Tuxtla Gutiérrez	$ 8.00
Chihuahua	Chihuahua	$ 9.00
D.F.	Cd. México	$ 8.35
Durango	Victoria de Durango	$ 7.50
Guanajuato	Guanajuato	$ 8.00
Hidalgo	Pachuca de Soto	$ 8.50
Nayarit	Tepic	$ 8.50
Querétaro de Arteaga	Santiago de Querétaro	$ 8.80
Quintana Roo	Ciudad Chetumal	$ 10.00
Sinaloa	Culiacán	$ 8.50
Sonora	Hermosillo	$ 11.50
Tamaulipas	Ciudad Victoria	$ 9.80
Tlaxcala	Tlaxcala de Xicohténcatl	$ 8.00
Veracruz	Xalapa de Enríquez	$ 9.50
Yucatán	Mérida	$ 8.80
Zacatecas	Zacatecas	$ 8.50

Fuente: Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados (SNIIM). Secretaría de Economía.

a) Elaboren en su cuaderno la gráfica cajabrazos que corresponde a estos datos.

b) ¿Qué escala y valores utilizarán para construirla? ____________________

c) ¿Cuál fue el valor de la mediana de los precios de tortilla en estas ciudades el día 31 de enero de 2007? ____________________

____

d) Calculen el valor de la media (promedio) de los precios de la tortilla y ubíquenlo en la gráfica. Comparen este valor con el valor de la mediana, ¿cuál es mayor? __________. ¿Cómo describen lo que sucede entre estos valores y la distribución de todos los precios de la tortilla? ____________________

____

e) ¿Cuáles fueron los precios de la tortilla en el primer 25% del total de ciudades registradas? ____________________

f) Comparen sus gráficas y respuestas con las de sus compañeros de grupo.

2. Utilicen los datos que obtuvieron al realizar el estudio sobre la cantidad de agua que consume diariamente su grupo para elaborar la gráfica cajabrazos en sus cuadernos.

a) Anoten en la siguiente tabla los cinco valores que necesitan para elaborar la gráfica.

Cantidad mínima de agua que consumen diariamente	**25%**	**Mediana 50%**	**75%**	**Cantidad máxima de agua que consumen diariamente**

b) También anoten una conclusión acerca de la manera en que se distribuyen las cantidades en el grupo y compárenlas con las de sus compañeros de grupo.

____

____

____

____

____

SESIÓN 3

COMPARACIÓN DE DATOS MEDIANTE LA GRÁFICA CAJABRAZOS

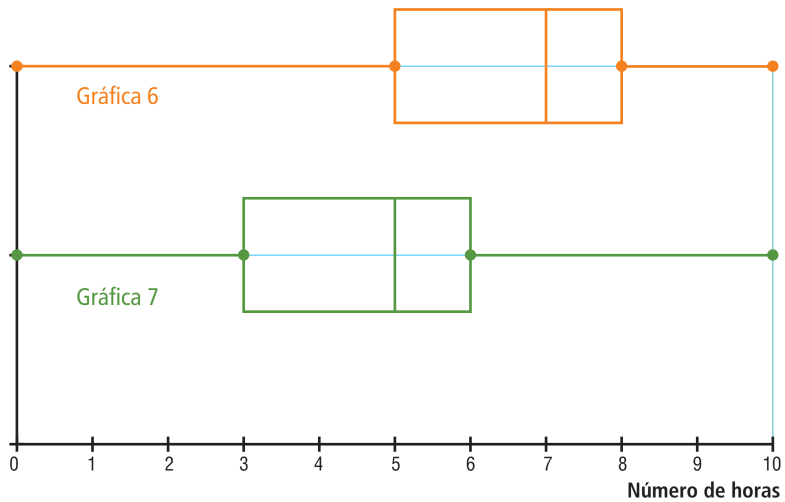
>>> Para empezar

Cuando realizan un estudio o experimento estadístico, obtienen datos que, al organizarlos y analizarlos, producen información. En algunas ocasiones resulta de gran ayuda comparar varios conjuntos de datos para tomar una decisión adecuada sobre la situación o el fenómeno que se estudia. Mediante la gráfica cajabrazos se muestra de manera clara y global la distribución de los datos de estos conjuntos.

>>> Manos a la obra

I. Las siguientes gráficas cajabrazos muestran los resultados obtenidos al preguntar:

- ¿Cuántas horas al día de tu tiempo libre utilizas en ver televisión? (gráfica 6).
- ¿Cuántas horas al día conviven contigo tus padres en los días de trabajo? (gráfica 7).



Gráficas 6 y 7

a) ¿Cuál es el porcentaje de los alumnos que conviven con sus padres de 0 a 3 horas?

____

b) ¿Cuál es el porcentaje de los alumnos que se dedican a ver televisión entre 9 y 10 horas? _______________

c) De acuerdo con las gráficas 6 y 7, anoten una V en el cuadrito para las afirmaciones que sean verdaderas.

- ☐ Menos del 50% de los alumnos encuestados conviven entre 0 y 1 horas al día con sus padres.
- ☐ Más del 75% de los alumnos dedican a ver televisión entre 8 y 10 horas al día.

☐ Un 25% de los alumnos conviven entre 5 y 6 horas al día con sus padres.

☐ Hay un 50% de alumnos que dedican a ver televisión entre 3 y 6 horas al día.

d) En el siguiente recuadro, escriban algunas de las semejanzas o diferencias que hay entre las distribuciones de los datos de las gráficas 6 y 7, así como las relaciones que encuentran entre ellas a manera de conclusión.

Comparen sus respuestas.

II. A estos alumnos también se les preguntó:

- ¿Cuántas horas al día de tu tiempo libre dedicas a la lectura, sin tomar en cuenta las que dedicas a tus libros de texto?

Los siguientes datos corresponden a los resultados de esa pregunta:

Valor mínimo (extremo inferior)	25%	Mediana 50%	75%	Valor máximo (extremo superior)
0 horas al día	1 hora al día	2 horas al día	4 horas al día	6 horas al día

a) En la misma figura de las gráficas 6 y 7, construyan la gráfica cajabrazos con los datos anteriores.

b) Escriba cada uno dos afirmaciones que puedan hacer al ver las tres gráficas, es decir, la 6, la 7 y la que acaban de construir.

1. ______________________________

2. ______________________________

c) Intercambien con su compañero sus afirmaciones y prueben si son ciertas. Anótenlas en sus cuadernos.

>>> Lo que aprendimos

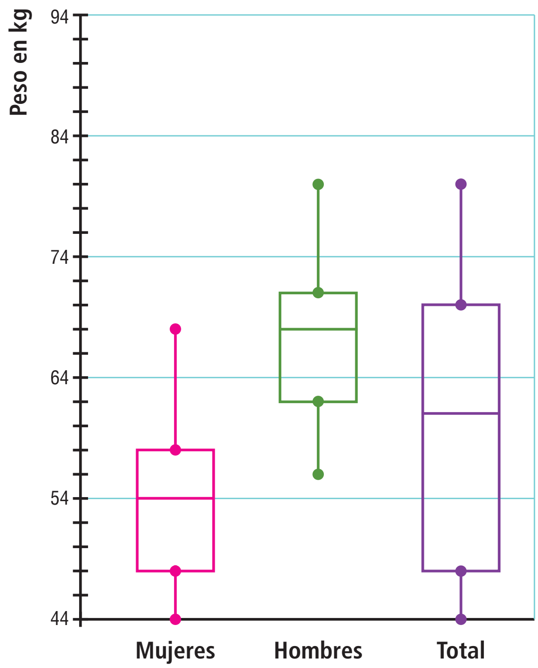
1. Realicen las siguientes preguntas a sus compañeros de grupo:
   - ¿Cuántas horas a la semana de tu tiempo libre dedicas a la lectura, sin tomar en cuenta las que dedicas a tus libros de texto?
   - ¿Cuántas horas a la semana de tu tiempo libre dedicas al estudio (buscar datos sobre los temas de clase, por ejemplo), sin tomar en cuenta las que dedicas a tus libros de texto?

   a) Anoten las respuestas y organicen de manera ascendente (de menor a mayor) los datos que obtuvieron para cada pregunta.

   b) En sus cuadernos, tracen sus gráficas cajabrazos correspondientes.

   c) Describan de qué manera se distribuyen los datos y anoten alguna conclusión.

2. Las siguientes gráficas muestran las distribuciones de los pesos en kilogramos de los alumnos de un grupo: por sexo y en total.



Gráfica 8

   a) ¿Qué valor tiene la mediana del total de alumnos de ese grupo? ____________

   b) Comparen este valor con los valores de las medianas de las otras dos gráficas, ¿cuál es mayor? ___________ . ¿Y cuál es menor? ____________

   c) ¿Cuál es la relación que encuentran entre los valores mínimos y los máximos de las gráficas por sexo y la gráfica del total? ______________________________________
   ____

3. En la sesión 2 construyeron la gráfica cajabrazos (gráfica 3) que muestra la cantidad de agua que consumen diariamente. Ahora se construirán las gráficas cajabrazos que muestren la distribución de la cantidad de agua que consumen diariamente los hombres y la distribución de la cantidad de agua que consumen las mujeres de tu grupo.

a) Describan y anoten cómo se distribuyen las cantidades de agua que consumen diariamente sus compañeras y compañeros de grupo, según se observa en cada gráfica que acaban de elaborar.

b) Comparen estas nuevas gráficas con la que construyeron anteriormente, que muestra los datos de todo el grupo (la gráfica 3). Escriban en sus cuadernos una conclusión sobre lo que muestran las tres gráficas.

Para conocer otras situaciones en las que se utilizan dos o más gráficas para comparar, interpretar y analizar datos, pueden ver el programa *Comparación de gráficas cajabrazos*.

>>> Para saber más

Sobre otro contexto en el que para mostrar la información utilizan gráficas cajabrazos y otras gráficas estadísticas que ya conocen, consulten:
http://www.inee.edu.mx
[Fecha de consulta: 8 de octubre de 2008].
Ruta: Publicaciones → Informes y reportes. Buscar el informe "El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. Sexto de primaria y tercero de secundaria"; en el documento PDF, ir a "El aprendizaje de las Matemáticas" (página 61).
Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Bibliografía

González, Roberto. "El aumento del precio de la tortilla sigue afectando la inflación: Banco de México". *La Jornada*, 23 de febrero de 2007 [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/02/23/index.php?section=economia&article=022n2eco].

— "En 9 meses el actual gobierno encareció 34.17% los básicos". *La Jornada*, 20 de septiembre de 2007 [recuperado el 2 de abril de 2008 de http://www.jornada.unam.mx/2007/09/20/index.php?section=economia&article=033n1eco].

Grandjean, Ann y Sheila Campbell. *Hidratación: líquidos para la vida*. México: ILSI de México, A.C., 2006 [recuperado el 16 de abril de 2008 de http://www.nutrinfo.com/pagina/e-books/hidrat.pdf].

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, 23 agosto 2003 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.inegi.gob.mx].

SEP. *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, 2000.

— *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México, 2000.

— 24 septiembre 2007 [recuperado el 3 de abril de 2008 de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/index.htm].

SEP/ILCE. *Biología. Enseñanza de las Ciencias a través de Modelos Matemáticos (Ecamm). Educación Secundaria*. México, 2000.

— *Geometría dinámica. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*. México, 2000.

— *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (Emat). Educación Secundaria*. México, 2000.

MATEMÁTICAS III

se imprimió por encargo de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos,
en los talleres de ,

.

El tiraje fue de ejemplares.

Tabla de razones trigonométricas

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1	0.0175	0.9998	0.0174
2	0.0349	0.9993	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9975	0.0699
5	0.0872	0.9961	0.0874
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1227
8	0.1392	0.9902	0.1405
9	0.1564	0.9876	0.1583
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1943
12	0.2079	0.9781	0.2125
13	0.2250	0.9743	0.2308
14	0.2419	0.9702	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9612	0.2867
17	0.2924	0.9563	0.3057
18	0.3090	0.9510	0.3249
19	0.3256	0.9455	0.3443
20	0.3420	0.9396	0.3639
21	0.3584	0.9335	0.3838
22	0.3746	0.9271	0.4040
23	0.3907	0.9205	0.2444
24	0.4067	0.9135	0.4452
25	0.4226	0.9063	0.4663
26	0.4384	0.8987	0.4877
27	0.4540	0.8910	0.5095
28	0.4695	0.8829	0.5317
29	0.4848	0.8746	0.5543
30	0.5000	0.8660	0.5773
31	0.5150	0.8571	0.6008
32	0.5259	0.8480	0.6248
33	0.5446	0.8386	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8191	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7535
38	0.6157	0.7880	0.7812
39	0.6293	0.7771	0.8097
40	0.6428	0.7660	0.8390
41	0.6561	0.7547	0.8692
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6819	0.7313	0.9325
44	0.6946	0.7193	0.9656
45	0.7071	0.7071	1

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46	0.7193	0.6946	1.0355
47	0.7313	0.6819	1.0723
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6560	1.1503
50	0.7660	0.6427	1.1917
51	0.7771	0.6293	1.2348
52	0.7880	0.6156	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5877	1.3763
55	0.8191	0.5735	1.4281
56	0.8290	0.5591	1.4825
57	0.8386	0.5446	1.5398
58	0.8480	0.5299	1.6003
59	0.8571	0.5150	1.6642
60	0.8660	0.5000	1.7320
61	0.8746	0.4848	1.8040
62	0.8829	0.4694	1.8807
63	0.8910	0.4539	1.9626
64	0.8987	0.4383	2.0503
65	0.9063	0.4226	2.1445
66	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3558
68	0.9271	0.3746	2.4750
69	0.9335	0.3583	2.6050
70	0.9396	0.3420	2.7474
71	0.9455	0.3255	2.9042
72	0.9510	0.3090	3.0776
73	0.9563	0.2923	3.2708
74	0.9612	0.2758	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7320
76	0.9702	0.2419	4.0107
77	0.9746	0.2249	4.3314
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1445
80	0.9848	0.1763	5.6712
81	0.9876	0.1564	6.3137
82	0.9902	0.1391	7.1153
83	0.9925	0.1218	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5143
85	0.9961	0.0871	11.4300
86	0.9975	0.0697	14.3006
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9993	0.0348	28.6362
89	0.9998	0.0174	57.2899
90	1	0	